Université des Antilles et de la Guyane

Département Scientifique Interfacultaire, Martinique

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

*DEUG MIAS 1e année * Mathématiques 1 * année 2005–2006*

Travaux dirigés * Série 5

Exercice 1. Soient deux réels $a \neq 1$ et b. On donne une suite (u_n) par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = a\, u_n + b\ .$$

(a) Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique et en déduire la valeur de v_n en fonction de $u_0,\ a,\ b$ et n.

(b) Calculer u_n en fonction de $u_0,\ a,\ b$ et n.

(c) Si $|a| < 1$, montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2. Soient (u_n) une suite convergente et (v_n) une suite divergente. Montrer par l'absurde que $(w_n) = (u_n + v_n)$ est divergente.

Exercice 3. Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{3-u_n}$.

(a) Montrer, par récurrence, que u_n est bien définie et que $u_n < 1$.

(b) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

(c) En déduire u_n en fonction de n et étudier la convergence de (u_n).

Exercice 4. On donne $u_0 > 0$ et $v_0 \geq u_0$. Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n}\ , \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}\ .$$

(On montrera qu'elles ont une limite commune, qu'on ne demande pas de calculer.)

Exercice 5. On considère la suite (u_n) de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

(a) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes.

Exercice 7. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$ est de Cauchy.