Université des Antilles et de la Guyane

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

Département Scientifique Interfacultaire (Campus de Schoelcher, Martinique)

DEUG MIAS 1E ANNÉE * MATHÉMATIQUES 1 * ANNÉE 2005-2006

Travaux Dirigés * Série 3

Exercice 1. On suppose que $|x-1| \leq 2$ et que $-5 \leq y \leq -4$.
Encadrer les quantités suivantes :

$$1)\ \ x+y \qquad 2)\ \ x-y \qquad 3)\ \ xy \qquad 4)\ \ \frac{x}{y} \qquad 5)\ \ |x|-|y|.$$

Exercice 2. Démontrer la proposition suivante :

« Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Si un ensemble A inclus dans E possède un plus grand (respectivement plus petit) élément, celui-ci est unique. »

Exercice 3. Pour chacun des sous ensemble suivants de $\mathbb{R}$, dire s'il y a un plus grand élément, un plus petit élément, une borne inférieure, une borne supérieure :

$$1)\ \ \mathbb{N}\ , \qquad 2)\ \ [0,1[\ , \qquad 3)\ \ \{1+\frac{n}{n+1};\ \ n \in \mathbb{N}^*\}\ .$$

Exercice 4.* Soit la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, donnez (pour ceux qui existent) les plus grands/petits éléments et les bornes sup/inf de $f([0;+\infty[)$ et $f([-2;-1[)$.

Exercice 5.* Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On note

$$A+B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in A \times B\ ;\ x = a+b\}\ ;\ -A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$$

(a) On suppose que A est majorée ; montrer que $-A$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, et que

$$\inf(-A) = -\sup A$$

(b) On suppose que A et B sont majorées ; montrer que $A+B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, et que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice 6. 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

$$a)\ \ (\forall \epsilon > 0,\ \ 0 \leq x \leq \epsilon) \implies x = 0\ ;$$
$$b)\ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leq x \leq \tfrac{1}{n}) \implies x = 0\ .$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

$$c)\ \ (\forall \epsilon > 0,\ \ 0 \leq |x-y| \leq \epsilon) \implies x = y\ ;$$
$$d)\ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leq |x-y| \leq \tfrac{1}{n}) \implies x = y\ .$$

Exercice 7.* Déterminer les bornes inférieures et supérieures, lorsqu'elles existent, des ensembles :

$$(a) \quad E = \left\{ \frac{E(x)}{x} \ ; \ x \in [1; +\infty[\right\} \qquad (b) \quad E = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} - n^2 \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 8. Montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
On raisonnera par l'absurde en posant $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers, et en comparant les puissances de 3 dans les diviseurs de p^2 et de $3q^2$.

Exercice 9.* Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

(c) $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe.

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

(a) $|x - 1| + |x - 3| \leq 5$

(b)* $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 1} \leq 1$

(c) $\sqrt{x + 2} \leq 4$

Exercice 11. Montrer que :

(a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leq y \Longrightarrow \mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(y))$

(b)* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) \leq \mathrm{E}(x + y) \leq \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y) + 1)$

(c)* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \mathrm{E}(nx) - n\,\mathrm{E}(x) \leq n - 1$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{E}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) = 2$.

Exercice 13.* Représenter dans un repère orthonormé la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x - \mathrm{E}(x) \end{aligned}$$

En déduire les bornes inférieure et supérieure de la partie $A \subset \mathbb{R}$ définie par

$$A = \{ \ f(x) \ ; \ x \in \mathbb{R} \ \} \ .$$

Exercice 14. Démontrez que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $a < x < b$.
Indication : utilisez la propriété d'Archimède pour montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$n \mid a - b \mid \geq 2$$

• ◦ • fin • ◦ •