

Université des Antilles et de la Guyane
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département Scientifique Interfacultaire (Campus de Schoelcher, Martinique)
DEUG MIAS 1^E ANNÉE * MATHÉMATIQUES 1 * ANNÉE 2005-2006

Travaux Dirigés * Série 2

Exercice 1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, & \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1}, \\ \text{(c)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{n}{2n+1}, & \text{(d)} \quad \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, démontrer que $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé « f est décroissante » en n'utilisant que des signes logiques et le signe $\leq$.
De même écrire l'énoncé « f n'est pas décroissante ».

Exercice 4. Soit E un ensemble, et I un sous-ensemble de E .

Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$. Traduire les propositions suivantes en langage mathématique quantifié :

P : « La fonction f est constante sur I » ;

Q : « La fonction f est croissante sur I ».

Application : Soit $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et f l'application de E dans $\mathbb{R}$, définie pour tout x dans E par $f(x) = x^2$.

(a) Trouver un sous-ensemble I de E tel que P soit vraie.

(b) Trouver un sous-ensemble I de E tel que Q soit vraie.

Exercice 5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que veulent dire les énoncés

(a) « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$ » (b) « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$ » ?

Exercice 6. On définit la fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante :

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n \geq 1 ; \\ -2n & \text{si } n \leq 0 . \end{cases}$$

Montrer que f est injective et surjective. En déduire que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.