**Université des Antilles et de la Guyane**
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire (Campus de Schoelcher, Martinique)

DEUG MIAS 1e année * Mathématiques 1 * Année 2005-2006

**Travaux Dirigés * Série 1**

**Exercice 1.** Soient $P, Q, R$ trois propositions.

(i) A l'aide de tables de vérité, démontrer les équivalences suivantes :

(a) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(b) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(c) $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$

(d) $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$

(e)* $(P \Rightarrow Q) \iff \neg P \vee Q$

(ii) En déduire des expressions plus simples des propositions suivantes :

(a) $\neg( P \vee \neg Q)$

(b) $P \wedge (\neg P \vee Q)$

(c) $P \vee (\neg P \wedge Q)$

(d)* $P \wedge ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q))$

**Exercice 2.*** Traduire la proposition $P$ suivante en langage mathématique quantifié :
$P$ : « Il existe un nombre réel strictement positif tel que, si son carré est supérieur à 4, alors ce nombre est strictement inférieur à 2. »
Est-ce que $P$ est vraie ou fausse ? Démontrez votre réponse.

**Exercice 3.** Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels. Ecrire l'énoncé « $a$ divise $b$ » avec des signes logiques, sans utiliser les fractions.

**Exercice 4.*** Démontrer, en utilisant un raisonnement par contraposition, que si deux réels $x$ et $y$ sont différents, alors les nombres $(x + 1)(y - 1)$ et $(x - 1)(y + 1)$ sont différents.

**Exercice 5.*** Démontrer, en utilisant un raisonnement par disjonction des cas, que si $n$ et $p$ sont des entiers relatifs, alors $np$ est pair ou $n^2 - p^2$ est multiple de 8.

**Exercice 6.** Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble de référence $E$.
On note $A^c$ (resp. $B^c$) le complémentaire de $A$ (resp. $B$) par rapport à $E$. Montrer que :

(a) $A \subset B \iff B^c \subset A^c$, (b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, (c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,

**Exercice 7.** Soit $E = \{-1, 0, \pi\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de $E$.

**Exercice 8.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles.

(a) Montrer que : $((A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C)) \Longrightarrow (B = C)$.

(b) Comparer les ensembles $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

**Exercice 9.** Soient $E, F$ deux ensembles et $A$ et $B$ deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence : $(A \times B) \subset (E \times F) \iff (A \subset E)$ et $(B \subset F)$ .