

Travaux dirigés, série 5.

Exercice 1. Etudier la dérivabilité des fonctions numériques définies par :

$$f(x) = |x| \sin^3 x; \quad g(x) = |x| \cos^3 x; \quad h(x) = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}; \quad \ell(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}.$$

La fonction ℓ est-elle continûment dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Préciser, pour les expressions suivantes, le domaine où elles sont définies, le domaine de dérivabilité de l'application qu'elles définissent, et la dérivée

$$\frac{|x+1|}{x+1}, \quad \sqrt{1-2\cos x}, \quad \cos \sqrt{x}, \quad \ln(\tan^2 x), \quad \ln(\ln(\frac{1}{x})), \quad (\sin x)^x, \quad \sqrt{\frac{1-\ln x}{1+\ln x}}.$$

Exercice 3. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\exp(f(x)^2); \quad \cos(f(x)) \quad \text{et} \quad f(\ln(f(x))^2).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x + 2 \exp x.$$

Montrer que f est une bijection. On note g la bijection réciproque de f . Montrer que g est deux fois dérivable et calculer $g(2)$, $g'(2)$ et $g''(2)$.

Exercice 5. Soient a et b dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ tels que $a + b = 1$. Prouver que

$$a \ln a + b \ln b + \ln 2 \geq 0.$$

Exercice 6. Soit f une fonction négative et dérivable au point a de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(a) \neq 0. \quad \text{Déterminer} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+a)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{2x}}.$$

Exercice 7. Etudier les hypothèses et la conclusion du théorème de Rolle pour la fonction :

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)^2}, \quad \text{sur} \quad [-2, 2].$$

Exercice 8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c).$$

Exercice 9. (a) Enoncer le théorème des accroissements finis.

(b) Rappeler le domaine de définition de la fonction arcsin ainsi que l'expression de sa fonction dérivée.

(c) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[$, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin 2x - \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}.$

Exercice 10. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{1}{x+2} \leq \ln(x+2) - \ln(x+1) \leq \frac{1}{x+1}$.

Exercice 11. Etablir : $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

Exercice 12. Calculer, en utilisant la dérivation : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
et : $\arcsin x + \arccos x$; $\cos(\arcsin x) - \sin(\arccos x)$ pour $x \in [-1, 1]$.

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1+e^x}{e^x}$

- (a) Calculer la dérivée de la fonction f .
- (b) On pose $J = f(\mathbb{R})$, montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur J .
- (c) Déterminer $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}([1, 2])$.
- (d) On note g la bijection réciproque de f . Montrer que g est dérivable et préciser son domaine de dérivabilité. Calculer $g(2)$, $g'(2)$ et $g''(2)$ sans utiliser une expression explicite de la fonction g .

Exercice 14. Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \exp(x\sqrt{3}) \sin x, \quad g : x \mapsto x^{n-1} \exp\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 15. Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right).$$

Exercice 16. Calculer $\arcsin(\sin x)$ pour $\frac{15\pi}{2} \leq x \leq \frac{17\pi}{2}$ et pour $\frac{17\pi}{2} \leq x \leq \frac{19\pi}{2}$.

Exercice 17. On considère $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2 E(\frac{1}{x})$.

- (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ que l'on précisera.
- (b) Etudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en $x_0 = 0$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Montrer que la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -\ln x$ est convexe. En déduire que, pour tous $a, b, c \in]0, +\infty[$, on a

$$(abc)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(a+b+c).$$

Exercice 19. Etudier et comparer $\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et $2 \arctan \sqrt{x}$.

Exercice 20. Etudier la continuité des fonctions suivantes

$$f(x) = E(x) \quad \text{et} \quad g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}.$$

$E(x)$ étant la fonction partie entière de x .

Exercice 21. (a) Enoncer les hypothèses et la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires.

- (b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.
(Indication : On pourra utiliser la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$).