Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire, Martinique

DEUG MIAS/MASS
année 2004–2005
Maths 1

Travaux dirigés, série 4.

Exercice 1. Soit $f : E \to F$ une application. Si B, B' sont des parties de F, montrer que :

a) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ **b)** $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$

c) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ **d)** $f(f^{-1}(B)) = B$ si f surjective.

A-t-on les mêmes relations avec f au lieu de f^{-1} (et $A, A' \subset E$ au lieu B, B', etc.) ?

Exercice 2. Calculer

$$\textbf{a)}\ \sup_{x\in[1,2]} 1/x\ ,\quad \textbf{b)}\ \sup_{x\in]1,2[} 1/x\ ,\quad \textbf{c)}\ \sup_{x>0} 1/x\ ,\quad \textbf{d)}\ \inf_{x>0} 1/x\ .$$

Exercice 3. Soient E un ensemble, A une partie de E. On appelle fonction caractéristique de A la fonction f_A égale à 1 sur A et à 0 sur $E \setminus A$. Montrer que

$$\textbf{a)}\ f_{A\cap B} = f_A\, f_B\ ,\quad \textbf{b)}\ f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_A\, f_B\ ,\quad \textbf{c)}\ f_{E\setminus A} = 1 - f_A\ .$$

Exercice 4. Soit E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. On définit la fonction f de E dans $\mathbb{N}$ par

$$f(A) = \sum_{x\in A} x \quad \text{et} \quad f(\emptyset) = 0\ .$$

a) Calculer $f(A_n)$ avec $A_n = \{\,0, 1, 2, ..., n\,\}$.

b) Montrer que f est surjective

c) Montrer que f n'est pas injective

d) Calculer le nombre d'éléments de $f^{-1}(\{3\})$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2\,x - 3 \end{array}$.

a) La fonction f est-elle injective, surjective, bijective ?

b) Reprendre cette question avec la restriction g de f à l'intervalle $[-1, +\infty[$. Dans la cas ou g serait bijective, déterminer g^{-1}.

c) Déterminer graphiquement

$$f(\mathbb{R})\ ,\quad f([-1,+\infty[)\ ,\quad f([-1,1])\ ,\quad f(\{-3\})\ ,\quad f^{-1}([-3,0])\ ,\quad f^{-1}(]5,+\infty[)\ .$$

Exercice 6. Soient E, F, G des ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

a) Montrer que $g \circ f$ est injective (resp. surjective), si f et g le sont.

b) Montrer que si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), alors f (resp. g) l'est.

Exercice 7. Soient f et g les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x^2 - x - 1$ et $g(x) = \sqrt{2\,x+1}$. Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$, $f \cdot g$ avec leur domaine de définition.

Exercice 8. Pour $I =]-1, 1[$, on considère l'application $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$.

a) Etudier la parité de f et montrer que f est strictement monotone. En déduire que f est injective.

b) Montrer que f est une bijection. Préciser la bijection réciproque de f.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, \ell \in \mathbb{R}$. Ecrire :

a) f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a.

b) f ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers a.

c) f ne tend pas vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

d) f n'a pas de limite au point a.

Exercice 10. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
Déterminer $\eta > 0$ tel que $|x| < \eta \;\Rightarrow\; |f(x)+1| < \frac{1}{25}$.

Exercice 11. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \exp(\sqrt{x} - x)$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \big(2\log(x+1) - \log(x^2+1)\big)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\ln(1+x)}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos(5\,x)}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x} + \sin x^5)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (a\,x + \sqrt{x^2+1})$ **g)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x^2-a}}{2\,x}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4\,x^3+1}}{\sqrt{x^3+3}}$ **i)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4\,x^3+1}}{\sqrt{x^3+3}}$ **j)** $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ **l)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} E(\frac{1}{x})$ **m)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{E(2\,x)}{E(x)}$.

Exercice 12. Discuter suivant la valeur des paramètres $a, b, c, m \in \mathbb{R}$, l'existence et la valeurs de la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^3+ax^2+bx+c} + m\,x\sqrt{x+2})$.

Exercice 13. Soit f définie par $f(x) = x\,E(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est continue en 0 et n'est pas continue en 1.

Exercice 14. En utilisant la définition de la continuité, montrer que les fonctions suivantes sont continues en tout point de $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) $f(x) = \sin x$. (Montrer que $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$.)

Exercice 15. Soient a et b deux réels donnés. On définit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ a\,x^2 + b\,x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} .$$

Trouver une relation liant a et b pour que f soit continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 16. On pose $u(x) = x - E(x)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)\,[1 - u(x)]$.

a) Calculer $f(x)$ pour $x \in [0,1]$. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

b) Montrer que les fonctions u et f sont 1–périodiques.

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dessiner le graphe de f.

Exercice 17. Peut-on prolonger par continuité au point $x = 0$ les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \ , \quad g(x) = x\left|1 + \frac{1}{x}\right| \ , \quad h(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} \ , \quad j(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} \ .$$

Exercice 18. Soit f une application continue sur un segment I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans I. Montrer que f possède un point fixe, c-à-d. un point α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 19. Vérifier les égalités suivantes en indiquant dans chaque cas leurs conditions de validité :

a) $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$.

b) $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})$.

c) $\arccos a + \arccos b = \arccos(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2})$.

Exercice 20. **a)** Calculer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

b) Montrer que (i) : $2 \arccos \frac{3}{4} = \arccos \frac{1}{8}$; (ii) : $\arccos \frac{5}{13} = 2 \arctan \frac{2}{3}$.

Exercice 21. Résoudre l'équation $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 22. Démontrer les égalités

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ ; \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 23. Simplifier

a) $y = \arcsin(2 \sin x \cos x)$ (pour $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$)

b) $\arctan \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$, $\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$ (poser $x = \tan\varphi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

Exercice 24. Etudier la limite au point 1 de la fonction $x \mapsto \arctan \frac{1}{x-1}$.