

Travaux dirigés, série 3.

**Exercice 1.** a) Ecrire sous la forme  $a + ib$ , avec  $a$  et  $b$  réels, les nombres

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}, \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}, \quad \frac{3+4i}{1+2i} + \frac{2-i}{1+i}.$$

b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un réel  $r$  strictement négatif?

**Exercice 2.** Trouver  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z$ ,  $1+z$  et  $\frac{1}{z}$  aient le même module.

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- a)  $(3-2i)z - \bar{z} = -i$ ,      b)  $z\bar{z} + 2(z - \bar{z}) = 4 - 8i$ ,  
 c)  $z^2 + z + 1 = 0$ ,      d)  $z^2 = 2 + 3i$ ,  
 e)  $z^2 - (1+2i)z + 2i = 0$ ,      f)  $(1+i)z^2 + (5+4i)z + 3+i = 0$ .

**Exercice 4.** a) Démontrer par récurrence la formule de Moivre,

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

- b) Calculer  $\cos 3\theta$  et  $\sin 3\theta$  à l'aide de cette formule.  
 c) Démontrer les identités (i)  $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$ ,  
 (ii)  $\frac{\sin 5\theta}{\sin \theta} = 16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1$  ( $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ ).  
 d) Calculer  $(1+i)^7$ ,  $(1+i)^n + (1-i)^n$ ,  $(1+i)^n - (1-i)^n$ .

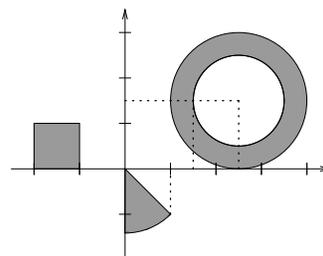
**Exercice 5.** a) Exprimer en fonction de  $\arg z$  :  $\arg(\bar{z})$ ;  $\arg(-z)$ ;  $\arg(\frac{1}{z})$ ;  $\arg(iz)$ ;  $\arg(-iz)$ .

b) Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$1+i; \quad \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}; \quad (\sqrt{3}-i)^6; \quad \frac{e^{ix}}{1+e^{ix}}, \quad x \notin \pi\mathbb{Z}.$$

**Exercice 6.** a) Pour  $Z_1 = \sqrt{3} + i$  et  $Z_2 = 1 - i$ , trouver la forme trigonométrique de  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_1 \cdot Z_2$  et  $\frac{Z_1}{Z_2}$ . En déduire  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

- b) Ecrire les racines carrées de  $Z = 1 + i$  sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.  
 En déduire les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .



**Exercice 7.** Caractériser les nombres complexes appartenant aux ensembles représentés ci-contre.

**Exercice 8.** a) Soient  $M$ ,  $P$  et  $Q$  trois points du plan. Donner à l'aide de vecteurs une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$ ,  $P$ ,  $Q$  soient alignés.

b) Soit  $z$  l'affixe de  $M$ . On associe à  $P$  l'affixe  $i$  et à  $Q$  l'affixe  $iz$ . Déterminer à l'aide de nombres complexes l'ensemble des points  $M$  tels que  $M$ ,  $P$ ,  $Q$  soient alignés.

**Exercice 9.** On pose  $Z = \frac{z+i}{2-iz}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{i}{2}\}$ . Soient  $M, M'$  et  $A$  les points d'affixe  $z, Z$  et  $i$ . Déterminer et représenter l'ensemble des points  $M$  tels que  
**a)**  $Z \in \mathbb{R}$ ; **b)**  $\arg Z = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ ; **c)**  $A, M, M'$  sont alignés; **d)**  $M = M'$ ;  
**e)**  $Z + 1 \in \mathbb{R}_+$ ; **f)**  $M'$  appartient au cercle de centre  $A$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ .

**Exercice 10.** Soit  $\mathbb{U}$  le cercle trigonométrique,  $ABC$  un triangle équilatéral inscrit dans  $\mathbb{U}$ ,  $\Delta$  une droite passant par  $O$ , et  $H, K, L$  les projections orthogonales respectives de  $A, B, C$  sur  $\Delta$ . Montrer que  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$ .

**Exercice 11.** On considère l'équation (E) :  $(z-j)^6 - (z-j^2)^6 = 0$ , avec  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .  
 Résoudre (E) en montrant que (E)  $\iff \frac{z-j}{z-j^2} = w$  avec  $w^6 = 1, w \neq 1$ .

**Exercice 12.** Montrer que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on a :

- a)**  $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ ; interprétation géométrique?  
**b)** si  $\arg(a) - \arg(b) = \pi/2 [2\pi]$ , alors  $|a+b| = |a-b|$ .

**Exercice 13.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- a)**  $\begin{cases} \arg(z) = \arg(z+2i) [2\pi] \\ |z| = |z+2| \end{cases}$       **c)**  $(1+\sqrt{3})z^4 = 1-i$ ;  
**b)**  $z^4 = 1+i\sqrt{3}$ ;      **d)**  $z^n = (z-1)^n$ ;  
**e)**  $z^8 - (2+2i)z^4 + 4i = 0$ .

**Exercice 14.** **a)** Montrer que  $P(z) = z^3 - 7z^2 + 19z - 13$  admet une racine réelle, puis résoudre l'équation  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

- b)** Déterminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $P(z) = z^4 + z^3 + az^2 + bz + 10$  vérifie  $P(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}) = 0$ . (Ind. : considérer  $j^2 = e^{4i\pi/3}$ , racine cubique de l'unité.)

**Exercice 15.** Linéariser les expressions suivantes, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$A(x) = \cos^3 x; \quad B(x) = \sin x \cos^3 x; \quad C(x) = \cos^3(2x) \sin^2(3x).$$

**Exercice 16.** Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $1+z+z^2+\dots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$ .  
 En déduire la valeur  $1+\zeta+\zeta^2+\dots+\zeta^{n-1}$  lorsque  $\zeta$  est une racine  $n$ -ième de l'unité?

**Exercice 17.** Soient  $A, B, C$  trois points d'affixes  $a, b, c$ ; montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct ssi  $a + jb + j^2c = 0$  où  $j = \exp(i\frac{2\pi}{3})$ .

**Exercice 18.** Soit  $p \in \mathbb{R}$ ; résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z+1)^3 = (p+1)^3$ . Comment les images des solutions sont-elles disposées? (Utiliser l'exercice précédent).

**Exercice 19.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ; calculer

$$\mathbf{a)} \sum_{k=0}^n \cos(a+kb); \quad \mathbf{b)} \sum_{k=0}^n \sin(a+kb); \quad \mathbf{c)} \sum_{k=0}^n \cos^k x \cos kx; \quad \mathbf{d)} \sum_{k=0}^n C_n^p \sin kx.$$

**Exercice 20.** Résoudre les équations

$$\mathbf{a)} (\bar{z})^p = z^n, \quad n, p \in \mathbb{N}^*; \quad \mathbf{b)} 1 + \frac{z+i}{z-i} + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0.$$