Université des Antilles et de la Guyane
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
Département Scientifique Interfacultaire (Campus de Schoelcher, Martinique)
DEUG MIAS 1ERE ANNÉE * Mathématiques 1 * ANNÉE 2004-2005
Travaux Dirigés * Série 2

N.B.: Les exercices dont les numéros sont suivis d'une étoile sont **non** prioritaires.

Exercice 1 Etudier la monotonie des suites définies par:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{n}{n+3}$
2. * $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \sqrt{2n + e^{-2n}}$
3. * $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{3^n}{n^2+1}$

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n + (n+1)\sin n}{2n+1}.$$

Montrer que (u_n) est bornée.

Exercice 3 Etudier la nature (convergence, divergence) des suites suivantes:

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1}, \quad v_n = \frac{1-n^2}{n+2}, \quad w_n = u_n + v_n, \quad a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}, \quad b_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n+2}$$

Exercice 4 Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ tel que $0 < u_0 < 2$. Considérons la suite (u_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$, et que la suite (u_n) est croissante.
2. En déduire que (u_n) est convergente. Calculer sa limite.

Exercice 5 Montrer que les suites suivantes convergent et déterminer leur limite.

1. * $u_n = \frac{\cos n + \sin n}{n}$
2. $v_n = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{n}{2n^2+k}$
3. * $w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n}, \; w_0 = \sqrt{3}$

Exercice 6 Montrer la convergence de la suite (u_n) définie par:

$$u_n = \frac{n^2 + \Sigma_{k=0}^{n}(2k+1)}{2n^2 + \Sigma_{k=0}^{n}(3k+2)}$$

Exercice 7 On considère la suite (u_n) de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

1. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 8 Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \Sigma_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9 On considère la suite (u_n) définie par: $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n}$.

1. Démontrer que (u_n) est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout n.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n + \alpha$. Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique.
3. Calculer v_n puis u_n en fonction de n. Quelle est la limite de (u_n)?

Exercice 10* Montrer que la suite (u_n) de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

est divergente de limite $+\infty$.

Exercice 11* Soit (u_n) une suite réelle, $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq m \Rightarrow u_n < a).$$

Montrer que si (u_n) est convergente de limite l, alors $l \leq a$.

Exercice 12* Soit a et b deux réels. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 3nb + 2a.$$

Calculer u_n en fonction de u_0, a, b et n.

Exercice 13* Soient a et b deux réels positifs non tous deux nuls. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+2} + \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$