Université des Antilles et de la Guyane
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département Scientifique Interfacultaire (Campus de Schoelcher, Martinique)

DEUG MIAS 1e année * Mathématiques 1 * Année 2004-2005

Travaux Dirigés * Série 0

N.B. : *Les exercices dont les numéros sont suivis d'une * sont* ***non*** *prioritaires.*

Exercice 1.* Soient P, Q, R trois propositions.

(i) A l'aide de tables de vérité, démontrer les équivalences suivantes :

(a) $P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
(b) $P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
(c) $\neg(P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
(d) $\neg(P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
(e) $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$

(ii) En déduire des expressions plus simples des propositions suivantes :

(a) $\neg(P \vee \neg Q)$
(b) $P \wedge (\neg P \vee Q)$
(c) $P \vee (\neg P \wedge Q)$
(d) $P \wedge ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q))$

Exercice 2. Soit E un ensemble de nombres. Traduire la proposition P suivante en langage mathématique quantifié :

P : "Il existe un entier naturel n tel que pour tout élément m appartenant à E, n soit multiple de m."

Application : Montrer que P est vraie pour $E = \{0, 2, 7, 22\}$

Exercice 3.* Soient a et b deux entiers naturels. Ecrire l'énoncé « a divise b » avec des signes logiques, sans utiliser les fractions.

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé « f est croissante » en n'utilisant que des signes logiques et le signe $\geq$. De même écrire l'énoncé « f n'est pas croissante ».

Exercice 5.* Soit E un ensemble, et I un sous-ensemble de E.

Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$. Traduire les propositions suivantes en langage mathématique quantifié :

P : « La fonction f est constante sur I » ;
Q : « La fonction f est croissante sur I ».

Application : Soit $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ et f l'application de E dans $\mathbb{R}$, définie pour tout x dans E par $f(x) = |x|$.

(a) Trouver un sous-ensemble I de E tel que P soit vraie.
(b) Trouver un sous-ensemble I de E tel que Q soit vraie.

Exercice 6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que veulent dire les énoncés

(a) « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$ »
(b) « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$ » ?

Exercice 7. Démontrer, en utilisant un raisonnement par disjonction des cas, que si n et p sont des entiers relatifs, alors np est pair ou $n^2 - p^2$ est multiple de 8.

Exercice 8.* Soient x et y deux réels positifs. Démontrer, en utilisant un raisonnement par contraposition, que si x et y sont différents, alors les nombres $(x^2+1)(y^2-1)$ et $(x^2-1)(y^2+1)$ sont différents.

Exercice 9. Démontrer, en utilisant un raisonnement par disjonction des cas, que pour tout nombre réel x,

(a) $|x-1| < x^2 + 2x + 4$ (b)* $|x+1| - |2x-1| \leq 3/2$

Exercice 10. Soient x et y des rationnels positifs tels que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$.
(Indication : raisonner par l'absurde et utiliser l'expression $\sqrt{x} - \sqrt{y}$.)

Exercice 11. Démontrer, par récurrence :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a \geq 0$, on a $(1+a)^n + 1 \geq 1 + n\,a$.

(b)* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(c)* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2$. Calculer P_1, P_2, P_3, puis proposer une formule simple pour P_n et prouver sa validité par récurrence.

Exercice 13. Soient A et B deux parties d'un ensemble de référence E.
On note A^c (resp. B^c) le complémentaire de A (resp. B) par rapport à E,
et $A \triangle B$ la réunion de $(A \setminus B)$ et de $(B \setminus A)$. Montrer que :

(a) $A \subset B \iff B^c \subset A^c$, (b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, (c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
(d) $A \triangle A = \emptyset$, (e) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 14. Soit $E = \{-1, 0, \pi\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, ensemble des parties de E.

Exercice 15.* Soient A et B deux ensembles. Comparer les ensembles $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 16. Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que

$$((A \cup B = A \cup C) \ \wedge \ (A \cap B = A \cap C)) \implies (B = C)\,.$$

Exercice 17. Soient E, F deux ensembles et A et B deux ensembles non vides. Montrer l'équivalence

$$(A \times B) \subset (E \times F) \iff (A \subset E) \ \text{ et } \ (B \subset F)\,.$$