# Procédures de régularisations pour des opérateurs monotones*

**Julian P. Revalski**
Institut de Mathématiques et d'Informatique
Académie Bulgare des Sciences, Sofia

novembre 2002-janvier 2003
Pointe-à-Pitre, Guadeloupe

*Ces notes représentent le contenu d'une série de séminaires donnée par l'auteur à l'Université des Antilles et de la Guyane, Pointe-à-Pitre, Guadeloupe dans le cadre d'un Marie Curie Individual Fellowship de la Commission Européenne, Contrat : HPMF-CT-2002-01874

**Table des matières**


0. Introduction
1. Préliminaires
2. La somme variationnelle
3. Elargissements d'opérateurs monotones
4. La some étendue
5. La composition variationnelle
6. Applications aux EDP élliptiques avec des coéfficients singuliers


**Le matériel est basé sur les papiers suivants :**


1. J.P. Revalski and M. Théra, Generalzied sums of monotone operators, *Compt. Rend. Acad. Sci., Paris*, t. 329(1999), Série I, 979–984. MR: 2000m:47068

2. J.P. Revalski and M. Théra, Variational and extended sums of monotone operators, in: Ill-posed Variational Problems and Regularization Techniques, (M. Théra and R. Tichatschke (eds.)), *Lect. Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 477, 1999, Springer-Verlag, pp.229–246. MR: 2000k:47071

3. J.P. Revalski and M. Théra, Enlargements and sums of monotone operators, *Nonlinear Anal., TMA*, **48**(2002), 505–519.

4. T. Pennanen, J.P. Revalski and M. Théra, Variational composition of a monotone mapping with a linear mapping with applications to elliptic PDE with singular coeficients, *J. Funct. Anal.*, to appear.


Les 3 derniers papiers sont disponibles sur :

http//www.univ-ag/aoc/activite/gdt.html

**Le matériel suplémentaire se trouve dans :**

R.R. Phelps, Lectures on monotone operators, (Lectures given at Paseky Summer School, Czech Republic, August 15-28, 1993), disponible sur le site :

http://arxiv.org/list/math/9302


**Remerciement :** Je voudrais remercier chaleureusement les collègues du laboratoire AOC pour les fructueuses discussions et l'intérêt portés à mes travaux, ce qui a contribué à l'élaboration de ces notes. Particulièrement Dr. Florence Jules pour ses conseils concernant la présentation du matériel en français.

# 0 Introduction

Les opérateurs monotones (en général, multivoques), et notamment ceux qui sont maximaux (i.e. dont les graphes sont éléments maximaux par rapport à l'inclusion) jouent un rôle très important dans beaucoup de domaines mathématiques. Notons, par exemple, l'optimisation (les sous-différentiels des fonctions convexes propres et semi-continues inférieurement (sci) sont des opérateurs maximaux monotones), équations différentielles (souvent l'opérateur qui engendre l'équation est (maximal) monotone) et l'analyse variationnelle (les inéquations variationnelles déterminées par des opérateurs (maximaux) monotones). Tout ça a abouti à une large étude de ces opérateurs, voir par exemple les monographes [A1, B, Ph2, Si, RoW].

Puisque la nature d'un opérateur monotone peut être assez difficile à manipuler, soit du point de vue théorique, soit du point de vue numérique, de nombreux auteurs se sont intéressés à chercher des approximations ou régularisations d'un opérateur, pour obtenir, à partir d'un opérateur monotone donné, un autre qui ait plus de propriétés régulières– par exemple la régularisé de Yosida [A1, B], voir aussi l'idée de l'élargissement dans ces notes. De l'autre coté, souvent on est obligé de faire certaines opérations sur des opérateurs monotones comme par exemple la somme ponctuelle de deux (ou un nombre fini de) opérateurs monotones ou bien la composition d'un opérateur monotone avec un opérateur linéaire (et continu). Il est bien connu que ces deux opérations sur les opérateurs monotones donnent toujours comme résultat un opérateur monotone. Mais même si les opérateurs concernés sont maximaux monotones, le résultat n'est pas obligé d'être un opérateur maximal. Le contre exemple classique est, qu'en général, la somme des sous-différentiels de deux fonctions convexes sci et propres peut être un ensemble propre du sous-différentiel de la somme des deux fonctions. Ce phénomène motiva les auteurs à chercher des notions "généralisées" pour la somme ponctuelles ou pour la composition usuelle : par exemple la somme parallèle [K], la somme variationnelle [ABT1, RT1, RT2], la somme étendue [RT1, RT2], la composition variationnelle [PRT] etc.

Le but de cette série de séminaires et de ces notes est de présenter les procédures de régularisations pour les opérateurs monotones, mentionnées ci-dessus, de donner leurs propriétés les plus importantes ainsi que de marquer des applications possibles. Les notes sont organisées de la manière suivante : après certains faits préliminaires dans la section 1 qui concernent les opérateurs monotones, on introduit (dans le cas réflexif) la somme variationnelle dans la section 2, en utilisant les régularisés de Yosida. Les propriétés majeures de cette somme sont présentées. Puis, dans la section 3, on étudie une autre approximation d'un opérateur monotone–un type d'élargissement qui garde certaines propriétés des sous-différentiels à $\varepsilon$-près, y compris une propriété de type Brøndstead-Rockafellar. Cet élargissement est ensuite utilisé dans la section 4 pour définir une autre somme généralisée– la somme étendue. Parmi les faits les plus importants de cette somme notons le suivant : dans un espace de Banach quelconque la somme étendue des sous-différentiels de deux fonctions convexes, propres et sci est égale au sous-différentiel de la somme de deux fonctions sans aucune condition de qualification. Ensuite, dans la section 5 on introduit et étudie la composition variationnelle d'un opérateur monotone avec un opérateur linéaire continu. Une règle de calcul de sous-différentiels est donnée qui resemble à celui ci-dessus concernant la somme étendue. L'importance de cette règle se manifeste dans l'application donnée dans la section 6 aux EDP elliptiques avec des coéficients singuliers.

# 1 Préliminaires

Dans ce qui suit $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, $(X^*, \|\cdot\|)$ son dual, $w$, $w^*$ désignent les topologies faible et faible étoile et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité.

Soit $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur (en général, mulitivoque). Le *graphe* de $A$ sera noté

$$\mathrm{Gr}(A) := \{(x, x^*) \in X \times X^* : x^* \in Ax\}$$

et les ensembles

$$\mathrm{Dom}(A) := \{x \in X : \ Ax \neq \emptyset\}$$

et

$$\mathrm{R}(A) := \bigcup \{Ax : x \in \mathrm{Dom}(A)\}$$

dénotent le *domaine* et *l'image* de $A$. L'opérateur inverse de $A : X \rightrightarrows X^*$ est $A^{-1} : X^* \rightrightarrows X$ défini par

$$A^{-1}x^* := \{x \in X : x^* \in Ax\}, \ x^* \in X^*.$$

Evidement $\mathrm{Dom}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$.

**Définition 1.1** *L'opérateur $A$ est* monotone *si :*

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A).$$

Si $A$ est monotone, alors c'est le cas de $A^{-1}$.

**Exemple 1.2** (opérateurs monotones)

• $X = \mathbb{R}$, $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non-décroissante : $g(x) \geq g(y)$ si $x \geq y$, $x, y \in D$.

• $X$-espace de Hilbert, $T : X \to X$ linéaire. $T$ est monotone ssi $T$ est positif, c-à-d $\langle Tx, x \rangle \geq 0$.

• (multivoque) $X = \mathbb{R}$, $Ax = \{0\}$ si $x < 0$, $Ax = \{1\}$ si $x > 0$ et $A(0)$ un sous-ensemble quelconque de [0,1].

• $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe sci propre (i.e. $\mathrm{dom} f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ est non vide). Le *sous-différentiel* de $f$ défini par :

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq \langle y - x, x^* \rangle \ \forall y \in X\}, \ x \in X,$$

est monotone.

• *l'application de dualité* $J : X \rightrightarrows X^*$ est définie par :

$$Jx := \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}, \quad x \in X.$$

En fait, $J = \partial(1/2\|\cdot\|^2), x \in X$, $\mathrm{Dom}(J) = X$ et $J$ vérifie

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq (\|x^*\| - \|y^*\|)^2, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(J).$$

• (point fixe) Soient $X$ un espace de Hilbert, $C \subset X$ non vide convexe, fermé, borné et $T : C \to C$ une contraction : $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$, $x, y \in C$. Soit $A := I - T$, où $I$ est l'identité. L'opérateur $A$ est monotone avec $\mathrm{Dom}(A) = C$ et $T$ a un point fixe ssi $0 \in \mathrm{R}(A)$.

• (meilleure approximation) Soient $X$ un espace de Hilbert, $C \subset X$ non vide convexe, fermé. Soit $P_C(x)$ l'unique élément de $C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$. $P_C$ vérifie :

$$\langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

**Définition 1.3** *L'opérateur $A : X \rightrightarrows X^*$ est* maximal monotone *s'il est monotone et son graphe est un élément maximal par rapport à l'ordre d'inclusion dans $X \times X^*$.*

De manière équivalente : $A$ est maximal monotone s'il est monotone et, en plus, $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ pour tout $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A)$ implique $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A)$.

**Exemple 1.4** (opérateurs maximaux monotones)

• les sous-différentiels des fonctions convexes sci propres (donc y compris l'application de dualité) (Rockafellar [Ph1]).

• $X$ un espace de Hilbert, $T$ linéaire positif.

**Faits importants :**

• Si $A : X \rightrightarrows X^*$ est monotone c'est le cas des opérateurs :

-co$A$ où $(\mathrm{co}A)x := \mathrm{co}(Ax)$ (enveloppe convexe);

- $\bar{A}$ où $\bar{A}x := \overline{Ax}^{w^*}$ (la fermeture par rapport à $w^*$);

- $\overline{A}^{\mathrm{Gr}}$ où $\mathrm{Gr}(\overline{A}^{\mathrm{Gr}}) = \overline{\mathrm{Gr}(A)}^{\|\cdot\|\times\|\cdot\|}$.

• Si $A$ est maximal monotone alors $A$ coincide avec les opérateurs ci-dessus.

• Si $A : X \rightrightarrows X^*$ est monotone il existe toujours $B : X \rightrightarrows X^*$ maximal monotone tel que $A \subset B$ (autrement dit $\mathrm{Gr}(A) \subset \mathrm{Gr}(B)$).

• Si $A$ est (maximal) monotone alors les opérateurs $\lambda A$, $\lambda > 0$ et $A(\cdot - x)$, $x \in X$ sont (maximaux) monotones.

• Si $A$ est maximal monotone, alors $A$ est localement borné en tout point $x \in \mathrm{IntDom}(A)$ (Rockafellar [Ro1]).

• $X$–réflexif, alors pour tout $\lambda > 0$ on a $\mathrm{R}(A + \lambda J) = X^*$ (Minty-Rockafellar; voir [Ro2]).

## 2 La somme variationnelle

Dans cette section on va introduire la somme variationnelle. Initialement la notion a été introduite par Attouch, Baillon et Théra dans le cadre des espaces de Hilbert. On l'étend dans le cadre d'espaces réflexifs. Donc, dans cette section $X$ sera un espace de Banach réflexif.

Soient $A$ et $B$ maximaux monotones tels que $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B) \neq \emptyset$. Leur somme ponctuelle est définie par :

$$A + B(x) = Ax + Bx, \quad x \in X,$$

et elle est toujours un opérateur monotone mais pas forcément maximal! (exemple : $f, g$ convexes sci propres, $\partial f + \partial g$ peut être un sous-ensemble propre de $\partial(f+g)$!).

Conditions suffisantes pour que la somme ponctuelle soit maximale :

-si $B$ est partout défini univoque et demi-continu (i.e. continu de la norme dans $X$ dans la topologie faible dans $X^*$) (Browder [Br]);
-si $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{IntDom}(B) \neq \emptyset$ (Rockafellar [Ro2]);

On a besoin toujours d'une condition de qualification (voir aussi [A, ART, Ch, Si]).

Ce défaut a motivé beaucoup d'auteurs pour chercher une notion de "somme généralisée" qui a plus de chance d'être un opérateur maximale : par exemple, la somme parallèle [K], la somme basée sur la formule de Trotte-Lee [Lap], la somme acréative d'opérateurs [Dia]. Une somme étendue sera examinée dans la section suivante.

Puisque $X$ est réflexif, on peut supposer (d'après un résultat de Troyanski, voir par exemple [Di]) que la norme de $X$ ainsi que la norme duale sont localement uniformément convexes et (Fréchet) différentiables sauf en zero. En particulier, ces deux normes sont strictement convexes et vérifient la condition de Kadec-Klee :

$$\text{si } x_n \to x \text{ faiblement dans } X \text{ et } \|x_n\| \to \|x\|, \text{ alors } x_n \to x \text{ dans la norme dans } X,$$

et pareillement pour la norme duale (les topologies faible et faible étoile coincident sur $X^*$ dans le cas réflexif). Dans ce cas, l'application de dualité est univoque bijective et continue (par rapport aux normes) dans les deux sens (homéomorphisme). Mentionnons aussi que l'application de dualité $J^*$ dans $X^*$ est exactement $J^{-1}$.

Dans le cas réflexif on va toujours considérer les normes comme ci-dessus.

**Théorème 2.1** (Rockafellar [Ro2]) *Soient $X$ un espace réflexif et $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $\lambda > 0$, on a $\mathrm{R}(A+\lambda J) = X^*$ et l'opérateur $(A+\lambda J)^{-1}$ est (défini partout) univoque, maximal monotone et demi-continu.*

Ce résultat permet d'associer à tout opérateur $A$ maximal monotone deux opérateurs :

D'abord la *résolvante* $J_\lambda^A : X \to \mathrm{Dom}(A)$ de $A$ d'ordre $\lambda > 0$ : pour tout $x \in X$, $J_\lambda^A x$ est l'unique (d'après le théorème de Rockafellar) solution $x_\lambda$ de l'inclusion :

$$0 \in J(x_\lambda - x) + \lambda A x_\lambda. \tag{2.1}$$

Deuxièment, la *régularisé* de Yosida $A_\lambda : X \to X^*$ de $A$ d'ordre $\lambda$ est définie par

$$A_\lambda x := \frac{1}{\lambda} J(x - x_\lambda), \quad x \in X. \tag{2.2}$$

On peut vérifier que

$$J_\lambda^A x = x - \lambda J^{-1} A_\lambda x \quad \text{pour tout } x \in X, \tag{2.3}$$

et que

$$A_\lambda := (A^{-1} + \lambda J^{-1})^{-1}, \ \lambda > 0. \tag{2.4}$$

Donc, pour tout $\lambda > 0$, la régularisé de Yosida $A_\lambda$ est un opérateur défini partout, univoque, maximal monotone et demi-continu (en effet, il est continu par rapport aux normes, voir [A1], Proposition 3.56).

Observons aussi que d'après (2.1) et (2.2) pour tout $\lambda > 0$ :

$$A_\lambda x \in A(J_\lambda^A x) \text{ pour tout } x \in X. \tag{2.5}$$

Si $X$ est un espace de Hilbert, alors $J = I$ (l'identité) et on a

$$J_\lambda^A = (I + \lambda A)^{-1} \text{ et } A_\lambda = (I - J_\lambda^A)/\lambda.$$

Si $A : X \rightrightarrows X^*$ est maximal monotone et $x \in \mathrm{Dom}(A)$, on note $A^{\min} x$ l'unique élément de $Ax$ de norme minimale dans $Ax$.

**Proposition 2.2** (Brezis, Crandall, Pazy[BCrPa]; la convergence forte dans Revalski-Théra [RT2]) *Soit $A$ maximal monotone dans un espace de Banach réflexif. Alors:*

(a) *pour tout $\lambda > 0$, $A_\lambda$ est borné (l'image d'un borné est borné);*

(b) *pour tous $\lambda > 0$ et $x \in \mathrm{Dom}(A)$, on a $\|A_\lambda x\| \leq \|A^{\min} x\|$;*

(c) *pour tout $x \in \mathrm{Dom}(A)$, $J_\lambda^A x$ converge vers $x$ pour la norme quand $\lambda \downarrow 0$ et $A_\lambda x$ converge vers $A^{\min} x$ pour la norme quand $\lambda \downarrow 0$.*

Soient $\mathcal{I} := \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu \neq 0\}$ et $\mathcal{F}$ le filtre des voisinages de zero dans $\mathcal{I}$. $\lim_{\mathcal{F}}$ signifie la limite quand $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I}$.

**Le schéma général :** Soient $A, B : X \rightrightarrows X^*$ maximaux monotones; on considère $A_\lambda + B_\mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I}$ ($A_0 := A$, $B_0 := B$) qui est un opérateur maximal monotone (Browder ci-dessus) et on prend la limite au sens des graphes.

La convergence au sens des graphes est la convergence au sens de Painlevé-Kuratowski des graphes sur $X \times X^*$ muni de la topologie produit ( forte ):

Soit $\{C_{\lambda,\mu} : (\lambda,\mu) \in \mathcal{I}\}$ une famille d'opérateurs maximaux monotones de $X$ dans $X^*$ :

$\liminf_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu} := \{(x,x^*) \in X \times X^*$ : pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $(x,x^*)$, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{U} \cap \mathrm{Gr}(C_{\lambda,\mu}) \neq \emptyset$ pour tout $(\lambda,\mu) \in F\}$;

$\limsup_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu} := \{(x,x^*) \in X \times X^*$ : pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de $(x,x^*)$ et pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe $(\lambda,\mu) \in F$ tel que $\mathcal{U} \cap \mathrm{Gr}(C_{\lambda,\mu}) \neq \emptyset\}$.

La famille $\{C_{\lambda,\mu} : (\lambda,\mu) \in \mathcal{I}\}$ converge en graphe vers l'opérateur monotone $C : X \rightrightarrows X^*$ si

$$\mathrm{Gr}(C) = \liminf_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu} = \limsup_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}.$$

On va écrire simplement $C = \lim_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$.

Définitions séquentielles équivalentes :

$(x,x^*) \in \liminf_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$ ssi pour tout suite $\{(\lambda_n,\mu_n)\} \subset \mathcal{I}$ telle que $\lambda_n,\mu_n \to 0$, il existe une suite $(x_n,x_n^*) \in C_{\lambda_n,\mu_n}$ telle que $(x_n,x_n^*) \to (x,x^*)$;

$(x,x^*) \in \limsup_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$ ssi il existe une suite $\{(\lambda_n,\mu_n)\} \subset \mathcal{I}$ avec $\lambda_n,\mu_n \to 0$ et telle qu'il existe une suite $(x_n,x_n^*) \in C_{\lambda_n,\mu_n}$ pour laquelle $(x_n,x_n^*) \to (x,x^*)$.

La proposition suivante donne certaines propriétés de la convergence au sens des graphes, dont on aura besoin plus tard :

**Proposition 2.3** (Attouch [A1]) *Soient $X$ un espace réflexif, $C$ et $\{C_{\lambda,\mu} : (\lambda,\mu) \in \mathcal{I}\}$ des opérateurs maximaux monotones de $X$ dans $X^*$. Alors*

(a) $\liminf_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$ *est monotone;*

(b) $C = \lim_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$ *ssi* $C \subset \liminf_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$*;*

(c) $C = \lim_{\mathcal{F}} C_{\lambda,\mu}$ *ssi*

$$\lim_{\mathcal{F}} (J + C_{\lambda,\mu})^{-1}(x^*) = (J + C)^{-1}(x^*) \quad \forall x^* \in X^*.$$

On donne maintenant la définition de la somme variationnelle (voir [ABT1]; le cas réflexif est considéré dans [RT1]) :

**Définition 2.4** *Soient $A$ et $B$ maximaux monotones dans un espace réflexif $X$. La somme variationnelle de $A$ et $B$, notée par $A \underset{v}{+} B$ est l'opérateur dont le graphe est :*

$$A \underset{v}{+} B := \liminf_{\mathcal{F}} (A_\lambda + B_\mu).$$

De manière équivalente : $x^* \in (A \underset{v}{+} B)(x)$ ssi pour toute suite $\{(\lambda_n, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}$ avec $(\lambda_n, \mu_n) \to 0$ il existent $\{x_n\} \subset X$ et $\{x_n^*\} \subset X^*$ telles que $x_n \to x$, $x_n^* \to x^*$ et $x_n^* \in A_{\lambda_n} x_n + B_{\mu_n} x_n$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

**Proposition 2.5** (Attouch, Baillon, Théra [ABT1]& Revalski-Théra[RT2]) *Soient $A, B : X \rightrightarrows X^*$ maximaux monotones et $X$ réflexif. Alors :*

(1) $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B) \subset \mathrm{Dom}(A \underset{v}{+} B)$;

(2) *$A \underset{v}{+} B$ est monotone;*

(3) *Si $A \underset{v}{+} B$ est maximale alors $A \underset{v}{+} B = \lim_{\mathcal{F}}(A_\lambda + B_\mu)$;*

(4) *$A \underset{v}{+} B = B \underset{v}{+} A$.*

**Démo:** (1) Soit $x \in \mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B)$. Alors, d'apreès la proposition 2.2, $A_\lambda x \to A^{\min} x$ quand $\lambda \downarrow 0$ et $B_\mu x \to B^{\min} x$ quand $\mu \downarrow 0$. Donc, $(x, A^{\min}x + B^{\min}x) \in \mathrm{Gr}(A \underset{v}{+} B)$.
(4) est évident, et (2) et (3) sont des conséquences de la proposition 2.3.

**Lemme 2.6** *Soient $A$ et $B$ maximaux monotones dans $X$ tels que* $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B) \neq \emptyset$. *Soit $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A \underset{v}{+} B)$ et $(x, x^*) = \lim_{\lambda,\mu\downarrow 0}(x_{\lambda,\mu}, A_\lambda x_{\lambda,\mu} + B_\mu x_{\lambda,\mu})$. Alors,*

$$\lim_{\lambda,\mu\downarrow 0} \lambda A_\lambda x_{\lambda,\mu} = 0 \ \textit{et} \ \lim_{\lambda,\mu\downarrow 0} \mu B_\mu x_{\lambda,\mu} = 0.$$

**Démo :** Soient $y \in \mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B)$, $u^* \in Ay$ et $v^* \in By$. Fixons $\lambda, \mu > 0$. En utilisant (2.5) on a :

$$\langle y - J_\lambda^A x_{\lambda,\mu}, u^* - A_\lambda x_{\lambda,\mu}\rangle \geq 0$$
$$\langle y - J_\mu^B x_{\lambda,\mu}, v^* - B_\mu x_{\lambda,\mu}\rangle \geq 0.$$

D'où, d'après (2.3)

$$\langle y - x_{\lambda,\mu} + \lambda J^{-1}(A_\lambda x_{\lambda,\mu}), u^* - A_\lambda x_{\lambda,\mu}\rangle \geq 0$$
$$\langle y - x_{\lambda,\mu} + \mu J^{-1}(B_\mu x_{\lambda,\mu}), v^* - B_\mu x_{\lambda,\mu}\rangle \geq 0.$$

Faisons la somme des deux :

$$\begin{gathered}\langle y - x_{\lambda,\mu}, u^* + v^* - (A_\lambda x_{\lambda,\mu} + B_\mu x_{\lambda,\mu})\rangle + \\ \langle \lambda J^{-1}(A_\lambda x_{\lambda,\mu}), u^* - A_\lambda x_{\lambda,\mu}\rangle + \langle \mu J^{-1}(B_\mu x_{\lambda,\mu}), v^* - B_\mu x_{\lambda,\mu}\rangle \geq 0.\end{gathered}$$

Finallement, en utilisant la définition de l'application de dualité :

$$\begin{aligned}&\langle y - x_{\lambda,\mu}, u^* + v^* - (A_\lambda x_{\lambda,\mu} + B_\mu x_{\lambda,\mu})\rangle \\ &\quad + \lambda\|u^*\|\,\|A_\lambda x_{\lambda,\mu}\| + \mu\|v^*\|\,\|B_\mu x_{\lambda,\mu}\| \\ &\geq \lambda\|A_\lambda x_{\lambda,\mu}\|^2 + \mu\|B_\mu x_{\lambda,\mu}\|^2.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour $y, u^*, v^*$ fixés, quand $\lambda, \mu \downarrow 0$, le premier terme de la gauche reste borné. On en déduit qu'il existe $M > 0$ tel que $\lambda^{1/2}\|A_\lambda x_{\lambda,\mu}\| < M$ et $\mu^{1/2}\|B_\mu x_{\lambda,\mu}\| < M$ pour $\lambda, \mu > 0$ suffisament petits. D'où la conclusion. ■

**Remarque 2.7** L'inégalité (2.6) est vraie sans supposer la convergence de $\{(x_{\lambda,\mu}, A_\lambda x_{\lambda,\mu} + B_\mu x_{\lambda,\mu})\}$.

Lorsque $\overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}$ ou $A+B$ est maximal, la somme variationnelle coincide avec ces opérateurs :

**Théorème 2.8** (Theorem 6.1 [ABT1], Theorem 4.12 [RT2]) *Soient $X$ réflexif et $A, B : X \rightrightarrows X^*$ maximaux monotones tels que $\overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}$ est maximal monotone. Alors,*

$$\overline{A+B}^{\mathrm{Gr}} = A \underset{v}{+} B.$$

**Démo :** Il suffit de démonter que $\overline{A+B}^{\mathrm{Gr}} \subset A \underset{v}{+} B$.

Soit $x^* \in \overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}(x)$, $x \in X$. Soit $\{(\lambda_n, \mu_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{I}$ une suite telle que $(\lambda_n, \mu_n) \to (0,0)$. On considère d'abord le cas $\lambda_n, \mu_n > 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Pour $n = 1, 2, \ldots$, soit $x_n$ la solution unique de :

$$Jx + x^* = Jx_n + A_{\lambda_n} x_n + B_{\mu_n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Prenons $y \in \mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B)$, $u^* \in Ay$ et $v^* \in By$. D'après la remarque 2.7, (2.6) reste vraie en remplacant $x_{\lambda,\mu}$ par $x_n$. Donc, en utilisant (2.6), (2.7) et la définition de l'application de dualité on a pour $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &\langle y - x_n, u^* + v^* - Jx - x^* \rangle + \langle y, Jx_n \rangle \\ &\quad + \lambda_n \|u^*\| \, \|A_{\lambda_n} x_n\| + \mu_n \|v^*\| \, \|B_{\mu_n} x_n\| \\ &\geq \lambda_n \|A_{\lambda_n} x_n\|^2 + \mu_n \|B_{\mu_n} x_n\|^2 + \|x_n\|^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Cette inégalité montre qu'il existe $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$, $\sqrt{\lambda_n}\,\|A_{\lambda_n} x_n\| \leq M$ et $\sqrt{\mu_n}\,\|B_{\mu_n} x_n\| \leq M$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$ En particulier,

$$\lim_n \lambda_n \|A_{\lambda_n} x_n\| = \lim_n \mu_n \|B_{\mu_n} x_n\| = 0.$$

Puisque $\{x_n\}$ est bornée, elle a au moins un point d'accumulation par rapport à la topologie faible, notons-le $\bar{x}$. Comme $\|x_n\|^2 = \langle x_n, Jx_n \rangle$ pour tout $n$ et puisque la monotonie de $J$ donne $\langle x_n - y, Jx_n \rangle \geq \langle x_n - y, Jy \rangle$, on obtient de (2.8) que pour tout $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &\langle y - x_n, u^* + v^* - Jx - x^* \rangle + \\ &\quad + \lambda_n \|u^*\| \, \|A_{\lambda_n} x_n\| + \mu_n \|v^*\| \, \|B_{\mu_n} x_n\| \\ &\geq \langle x_n - y, Jy \rangle. \end{aligned}$$

En prenant une sous-suite de $\{x_n\}$ qui converge faiblement vers $\bar{x}$ et en passant à la limite on a :

$$\langle y - \bar{x}, u^* + v^* - Jx - x^* \rangle \geq \langle \bar{x} - y, Jy \rangle,$$

ou de manière équivalente,

$$\langle y - \bar{x}, Jy + u^* + v^* - Jx - x^* \rangle \geq 0.$$

Puisque $y \in \mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B)$, $u^* \in Ay$ et $v^* \in By$ étaient arbitraires on en déduit que

$$\langle y - \bar{x}, Jy + w^* - Jx - x^* \rangle \geq 0$$

pour tout $(y, w^*) \in \overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}$. L'opérateur $\overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}$ étant maximal, c'est aussi le cas de $J + \overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}$. Par conséquent, $Jx + x^* \in J\bar{x} + \overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}(\bar{x})$. Finalement, puisque $x^* \in \overline{A+B}^{\mathrm{Gr}}(x)$, le résultat de Rockafellar implique $\bar{x} = x$, d'où toute la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers $x$.

On démontre aussi que $\|x_n\| \to \|x\|$. $J$ étant le sous-différentiel de $(1/2)\|\cdot\|^2$ on a pour tout $n = 1, 2, \ldots$

$$\langle x, Jx_n \rangle \leq \langle x_n, Jx_n \rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x_n\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x_n\|^2.$$

D'où en utilisant (2.8) avec $y = x$ on obtient que $\limsup_n \|x_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Ceci et le fait que la norme est faiblement sci donnent :

$$\|x\|^2 \leq \liminf_n \|x_n\|^2 \leq \limsup_n \|x_n\|^2 \leq \|x\|^2,$$

i.e. $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$, d'où $\|x_n\| \to \|x\|$ et la propriété de Kadec-Klee permet de dire que $\{x_n\}$ converge vers $x$ pour la norme. Par (2.7) et la continuité de $J$, on déduit que $A_{\lambda_n}x_n + B_{\mu_n}x_n$ converge fortement vers $x^*$.

Pour conclure, il faut considérer des opérateurs de type $A_{\lambda_n} + B$ et $A + B_{\mu_n}$. Dans ce cas, qui est plus facile, on peut aussi utiliser des résultats connus de Brezis, Crandall et Pazy [BCrPa], théorème 2.1, pour voir que $(x, x^*)$ est la limite d'une suite de $A_{\lambda_n} + B$ ou $A + B_{\mu_n}$. ■

Un corollaire immédiat est :

**Théorème 2.9** *Soient $X$ réflexif et $A, B : X \rightrightarrows X^*$ maximaux monotones tels que $A+B$ est maximal. Alors*

$$A + B = A \underset{v}{+} B.$$

## 2.1 Le cas de sous-différentiels de fonctions convexes

Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre sci et convexe. La régularisé de Moreau-Yosida de $f$ d'ordre $\lambda > 0$ est donnée par :

$$f_\lambda(x) := \inf_{y \in X}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2\}, \quad x \in X.$$

Il est bien connu que pour tout $\lambda > 0$, $f_\lambda$ est une fonction partout définie convexe et continue (même $C^1$ avec les normes qu'on considère) et qu'on a :

$$\partial(f_\lambda) = (\partial f)_\lambda. \tag{2.9}$$

Rappellons *la convergence au sens de Mosco* ([Mo]) : La suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions propres, sci convexes dans $X$ *converge au sens de Mosco* vers $f$ si pour tout $x \in X$ on a :

(i) pour toute suite $\{x_n\} \subset X$ faiblement convergente vers $x$ on a $f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f_n(x_n)$;

(ii) il existe une suite $\{x_n\} \subset X$ fortement convergente vers $x$ telle que $\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) \le f(x)$.

Remarquons aussi le résultat suivant (déjà bien connu) de Attouch [A1, Theorem 3.66] : $f_n$ Mosco converge vers $f$ si et seulement si $\lim \partial f_n = \partial f$ et une certaine condition normalisée est vraie.

**Théorème 2.10** ([ABT1], Th. 7.2, [RT2], Th. 5.1). *Soient $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres convexes et sci dans un espace réflexif telles que* $\mathrm{dom}f \cap \mathrm{dom}g \neq \emptyset$. *Alors,*

$$\partial(f+g) = \partial f \underset{v}{+} \partial g.$$

*En plus,*

$$\partial(f+g) = \lim_{\mathcal{F}}(\partial f_\lambda + \partial g_\mu).$$

**Démo :** Puisque $\mathrm{dom}f \cap \mathrm{dom}g \neq \emptyset$, $\partial(f+g)$ est maximal monotone. La fonction $f_\lambda$ pour $\lambda > 0$ ($g_\mu$ pour $\mu > 0$) est définie partout et continue. Donc, la règle classique de Moreau-Rockafellar donne $\partial f_\lambda + \partial g_\mu = \partial(f_\lambda + g_\mu)$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I}$. Par conséquent, aussi de (2.9), on déduit que

$$(\partial f)_\lambda + (\partial g)_\mu = \partial(f_\lambda + g_\mu) \quad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in \mathcal{I}. \tag{2.10}$$

En outre, un résultat de [AT], théorème 3.20,(voir aussi [A1, Theorem 2.40]) implique que la famille $\{f_\lambda + g_\mu : (\lambda, \mu) \in \mathcal{I}\}$ Mosco converge vers $f + g$ quand $(\lambda, \mu)$ converge vers $(0, 0)$. Ceci et le théorème d'Attouch cité ci-dessus impliquent $\lim_{\mathcal{F}} \partial(f_\lambda + g_\mu) = \partial(f+g)$. Il nous reste à utiliser (2.10) et la définition de la somme variationnelle. ■

Voir aussi Jourani [J] pour un résultat similaire et pour d'autres formules séquentielles Thibault [Th1, Th2]. Dans le cas général voir Section 4 ci-dessous.

# 3 Elargissements d'opérateurs monotones

Dans cette section $X$ sera un espace de Banach quelconque. Soit $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur monotone. Pour $\varepsilon \ge 0$, le *$\varepsilon$-élargissement* de $A$ est l'opérateur $A^\varepsilon : X \rightrightarrows X^*$ défini par

$$A^\varepsilon x := \{x^* \in X : \langle y - x, y^* - x^* \rangle \ge -\varepsilon \quad \text{pour tout } (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A)\}. \tag{3.1}$$

Cette notion a été mentionée dans [MaT] mais pas étudiée. Systématiquement, elle a été explorée dans [BuISv], [BuSSv] en connection avec la résolution de problèmes d'inclusions (voir aussi [Sv] pour une continuation de cette étude). Un autre type d'élargissement dans le cadre d'un espace de Hilbert est consideré dans [Ni]. Pour des opérateurs satisfaisant une condition similaire voir [Ve] et pour d'autres idées d'élargissements [LP, R].

On vérifie aisement que l'opérateur $A^\varepsilon$ a des images convexes et $w^*$-fermés pour tout $\varepsilon \geq 0$. En plus, comme une conséquence de la monotonie de $A$, il est vraiment un élargissement de $A$: $Ax \subset A^\varepsilon x$ pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $x \in X$. Pour chaque $x \in X$ on a aussi $A^{\varepsilon_1}x \subset A^{\varepsilon_2}x$ si $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Mais faites attention! : si $A$ et $B$ sont deux opérateurs monotones tels que $A \subset B$ ($\mathrm{Gr}(A) \subset \mathrm{Gr}(B)$) alors $B^\varepsilon \subset A^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon \geq 0$.

Evidement, l'idée d'avoir un tel élargissement est motivée par la notion de $\varepsilon$-sous-différentiel d'une fonction propre sci et convexe $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ :

$$\partial_\varepsilon f(x) := \{x^* \in X^* : f(y) - f(x) \geq \langle y - x, x^* \rangle - \varepsilon \ \text{ pour tout } y \in X\}, \quad x \in X.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\partial_\varepsilon f$ est toujours non vide en tout point de $\mathrm{dom} f$, i.e. $\mathrm{Dom}(\partial_\varepsilon f) = \mathrm{dom} f$. Bien sûr, pour $\varepsilon = 0$, $\partial_0 f$ est le sous-différentiel $\partial f$ de $f$.

Dans le cas $A = \partial f$ l'élarissement donné dans (3.1) est plus large que le $\varepsilon$-sous-différential, i.e. $\partial_\varepsilon f \subset (\partial f)^\varepsilon$, et l'inclusion peut être stricte : ([MaT], i.e. $X = \mathbb{R}, f(x) = x^2$).

Pour $A : X \rightrightarrows X^*$ monotone, on voit facilement que

$$A^0 x := \bigcap \{A^\varepsilon x : \varepsilon > 0\}, \quad x \in X.$$

On sait que $A \subset A^0$. Rapellons que (voir par exemple [Ph2]) un couple $(x, x^*) \in X \times X^*$ est *monotoniquement relié à* $\mathrm{Gr}(A)$ si $\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0$ pour tout $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A)$. Evidement $\mathrm{Gr}(A^0)$ est exactement l'ensemble de tous les couples dans $X \times X^*$ monotoniquement reliés à $\mathrm{Gr}(A)$. L'opérateur $A^0$ n'est pas forcément monotone (voir ci-dessous). Mais si $A$ est maximal monotone alors on a :

**Proposition 3.1** *Soit $A$ maximal monotone. Alors $A = A^0$.*

Par conséquent on obtient :

**Corollaire 3.2** *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre sci et convexe. Alors*

$$\partial f = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\partial f)^\varepsilon.$$

Une classe d'opérateurs només de type (D) a été introduite par Gossez [Go1] avec l'idée d'avoir une classe d'opérateurs qui presérvent les bonnes propriétés des opérateurs maximaux monotones dans le cas réflrxif : On identifie l'espace de Banach $X$ avec son injection cannonique $\hat{X}$ dans le bi-dual $X^{**}$. Si $A : X \rightrightarrows X^*$ est monotone soit $\hat{A}$ l'opérateur $A$ considéré comme une application de $X^{**}$ dans $X^*$, i.e. $\mathrm{Gr}(\hat{A}) = \{(\hat{x}, x^*) : (x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A)\}$. $A$ est de *type (D)* ([Go1]) si pour tout couple $(x^{**}, x^*) \in X^{**} \times X^*$

qui est monotoniquement relié à $\mathrm{Gr}(\hat{A})$ il existe une suite généralisée $\{(x_\alpha, x_\alpha^*)\} \subset \mathrm{Gr}(A)$ telle que $\hat{x}_\alpha \to x^{**}$ faiblement etoile dans $X^{**}$, $\{x_\alpha\}$ est bornée et $x_\alpha^* \to x^*$ dans la norme. On peut vérifier ([Ph2]) que si $A$ est monotone de type (D) alors l'opérateur $\hat{A}^0 : X^{**} \to X^*$, dont le graphe est constitué des couples monotoniquement reliés à $\mathrm{Gr}(\hat{A})$ dans $X^{**} \times X^*$, est maximal monotone (donc le même est vrai pour $A^0$). Mais en général, $\hat{A}^0$ n'est pas monotone ([Go2]). Dans le cas refelxif (parce que $\hat{X} = X^{**}$) la classe d'opérateurs maximaux monotones coincide avec la classe d'opérateurs de type (D) maximaux monotones. Le sous-différentiel $\partial f$ d'une fonction propre convexe sci $f$ dans $X$ est maximal monotone de type (D) ([Go1]).

On étudie maintenant les relations entre les élargissements d'un opérateur et ces extensions mentionées ci-dessus.

**Proposition 3.3** *Soit $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur monotone. Alors, pour tout $\varepsilon \geq 0$ on a :*

(i) $A^\varepsilon = \bar{A}^\varepsilon$ *;*

(i) $A^\varepsilon = (\mathrm{co}A)^\varepsilon$ *;*

(iii) $A^\varepsilon = (\overline{A}^{\mathrm{Gr}})^\varepsilon$ *;*

(iv) *si $A$ est monotone de type (D) et $\hat{A}^\varepsilon$ désigne le $\varepsilon$-élargissement de $\hat{A}$ dans $X^{**} \times X^*$, alors $(\hat{A}^0)^\varepsilon = \hat{A}^\varepsilon$.*

**Démo :** Fixons $\varepsilon \geq 0$. D'après les remarques après la définition de l'élargissement, on a $\bar{A}^\varepsilon \subset A^\varepsilon$, $(\mathrm{co}A)^\varepsilon \subset A^\varepsilon$ et $(\overline{A}^{\mathrm{Gr}})^\varepsilon \subset A^\varepsilon$. Supposons maintenant que $x^* \in A^\varepsilon x$, $x \in X$. Alors,

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq -\varepsilon \quad \text{pour tout } (y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A). \tag{3.2}$$

Prenons $(z, z^*) \in \mathrm{Gr}(\bar{A})$. Alors, $z^* \in \bar{A}z$ et par consequent $z^* = w^* - \lim_\alpha z_\alpha^*$, où $\{z_\alpha^*\}$ est une suite généralisée dans $Az$. Puisque d'après (3.2)

$$\langle z - x, z_\alpha^* - x^* \rangle \geq -\varepsilon \quad \text{pour tout } \alpha,$$

en passant à la limite on obtient que

$$\langle z - x, z^* - x^* \rangle \geq -\varepsilon.$$

Donc, $x^* \in \bar{A}^\varepsilon x$.

En ce qui concerne (ii), soit $x^* \in A^\varepsilon x$, $x \in X$ et observons que le couple $(x, x^*)$ satisfait aussi (3.2). Soit $(z, z^*) \in \mathrm{Gr}(\mathrm{co}A)$. Alors, $z^* \in (\mathrm{co}A)z = \mathrm{co}(Az)$ et par conséquent $z^* = \sum_{i=1}^n t_i z_i^*$ pour certains $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ et $z_i^* \in Az$. En utilisant (3.2) on a

$$\begin{aligned} \langle z - x, z^* - x^* \rangle &= \langle z - x, \textstyle\sum_{i=1}^n t_i z_i^* - x^* \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n t_i \langle z - x, z_i^* - x^* \rangle \\ &\geq \textstyle\sum_{i=1}^n t_i(-\varepsilon) = -\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $x^* \in (\mathrm{co}A)^\varepsilon(x)$.

Pour conclure la preuve de (iii) supposons que $(z, z^*) \in \mathrm{Gr}(\overline{A}^{\mathrm{Gr}})$. Donc, $(z, z^*) = \lim_n (z_n, z_n^*)$, où $\{(z_n, z_n^*)\}$ est une suite de $\mathrm{Gr}(A)$. Le choix de $(x, x^*)$ et (3.2) donnent

$$\langle z_n - x, z_n^* - x^* \rangle \geq -\varepsilon \quad \text{pour tout } n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle z - x, z^* - x^* \rangle &= \langle z_n - x, z_n^* - x^* \rangle + \langle z - z_n, z_n^* - x^* \rangle + \langle z - x, z^* - z_n^* \rangle \\ &\geq -\varepsilon + \langle z - z_n, z_n^* - x^* \rangle + \langle z - x, z^* - z_n^* \rangle \end{aligned}$$

Puisque les suites sont bornées, en passant à la limite on obtient

$$\langle z - x, z^* - x^* \rangle \geq -\varepsilon.$$

Donc, $x^* \in (\overline{A}^{\mathrm{Gr}})^\varepsilon x$.

La preuve de (iv) est la même comme celle-ci de (iii) en utilisant des suites généralisées (voir aussi la définition d'un opérateur de type (D)). ■

Un corollaire imédiat est :

**Corollaire 3.4** *Soit $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur monotone. Alors pour tout $\varepsilon \geq 0$ on a :*

(i) $A^\varepsilon = \bar{A}^\varepsilon = (\mathrm{co}A)^\varepsilon = (\overline{\mathrm{co}}A)^\varepsilon$;

(ii) $A^\varepsilon = (\overline{A}^{\mathrm{Gr}})^\varepsilon = (\overline{\mathrm{co}A}^{\mathrm{Gr}})^\varepsilon = \left[\overline{\mathrm{co}}(\overline{A}^{\mathrm{Gr}})\right]^\varepsilon$.

**Remarque 3.5** Si l'opérateur $A$ est localement borné, on voit facillement que les résultats si-dessus qui concernent la fermeture $\overline{A}^{\mathrm{Gr}}$ sont vrais aussi si on fait la fermeture du graphe de $A$ dans $X \times X^*$ par rapport à la topologie produite $\|\cdot\| \times w^*$.

A la fin de cette section on montre qu'un théorème de type Brøndsted-Rockafellar est vrai pour les opérateurs de type (D) qui sont maximaux.

Rappellons que pour un opérateur monotone $A : X \rightrightarrows X^*$, $\hat{A}^0$ désigne l'opérateur entre $X^{**}$ et $X^*$ qui a comme graphe tous les couples dans $X^{**} \times X^*$ qui sont monotoniquement reliés à $\hat{A}$. Le résultat suivant de Gossez est une généralisation de théorème de Minty-Rockafellar : *Soient $X$ un espace de Banach et $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur maximal monotone de type (D). Alors, pour tout $\lambda > 0$ on a* $\mathrm{R}(\hat{A}^0 + \lambda(J^*)^{-1}) = X^*$.

Maintenant nous sommes prêts de démontrer le résultat suivant qui est un théorème de type Brøndsted-Rockafellar pour les $\varepsilon$-élargissements dans un espace de Banach quelconque. Dans le cas quand $X$ est réflexif, ce résultat est démontré par Torralba dans sa thèse de doctorat [To], Proposition 6.17 (voir aussi [BuSSv] pour le cas hilbertien).

**Théorème 3.6** *Soient $X$ un espace de Banach et $A : X \rightrightarrows X^*$ un opérateur maximal monotone de type (D). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A^\varepsilon)$ et pour tout $\lambda > 0$ il existe $(\bar{x}^{**}, \bar{x}^*) \in \mathrm{Gr}(\hat{A}^0)$ tel que $\|\bar{x}^{**} - \hat{x}\| \leq \lambda$ et $\|\bar{x}^* - x^*\| \leq \varepsilon/\lambda$.*

**Démo :** La preuve est basé sur la généralisation du théorème de Minty-Rockafellar pour les opérateurs de type (D).

Fixons $\varepsilon > 0$, $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A^\varepsilon)$ et $\lambda > 0$. On vérifie aisement que l'opérateur $B(\cdot) := A(\cdot + x)$ est aussi (maximal monotone) de type (D) et tel que $\hat{B}^0(\cdot) = \hat{A}^0(\cdot + \hat{x})$. Posons $t = \varepsilon/\lambda^2$. D'après le théorème de Gossez on a $\mathrm{R}(\hat{A}^0(\cdot + \hat{x}) + t(J^*)^{-1}) = X^*$. Donc, il existe $\bar{x}^{**} \in X^{**}$, $\bar{x}^* \in \hat{A}^0\bar{x}^{**}$ et $y^* \in (J^*)^{-1}(\bar{x}^{**} - \hat{x})$ tels que

$$x^* = \bar{x}^* + ty^*. \tag{3.3}$$

D'après la proposition 3.3 (iv), $(\hat{x}, x^*) \in \mathrm{Gr}((\hat{A}^0)^\varepsilon)$. En utilisant ce fait, la définition de $J^*$ et (3.3) on obtient :

$$-t||\bar{x}^{**} - \hat{x}||^2 = -\langle ty^*, \bar{x}^{**} - \hat{x}\rangle = \langle \bar{x}^* - x^*, \bar{x}^{**} - \hat{x}\rangle \geq -\varepsilon.$$

Puisque $t = \varepsilon/\lambda^2$ on conclut que $||\bar{x}^{**} - \hat{x}|| \leq \lambda$. En outre, cette inégalité, la définition de $J^*$ et (3.3) donnent

$$||\bar{x}^* - x^*|| = t||y^*|| = t||\bar{x}^{**} - \hat{x}|| \leq t\lambda = \varepsilon/\lambda.$$

D'où la conclusion. ■

Dans le cas particulier d'un espace réflexif on a $\hat{A}^0 = \hat{A}$ et donc le couple $(\bar{x}^{**}, \bar{x}^*)$ appartient au graphe de $A$. C'est le résultat de Torralba.

Dans le cas général, si on veut avoir une approximation d'un couple de l'élargissement de $A$ par un couple du graphe de l'opérateur initial $A$, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 3.7** *Soit $A$ un opérateur maximal monotone de type (D) entre un espace de Banach $X$ et son dual $X^*$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A^\varepsilon)$ il existe $(x_\varepsilon, x_\varepsilon^*) \in \mathrm{Gr}(A)$ telle que :*

(i) $||x_\varepsilon^* - x^*|| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$; *et*

(ii) $|\langle x_\varepsilon - x, x_\varepsilon^* - x^*\rangle| \leq 2\varepsilon$.

**Démo :** Fixons $\varepsilon > 0$ et $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A^\varepsilon)$. D'après le théorème ci-dessus (avec $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$) il existe un couple $(\bar{x}^{**}, \bar{x}^*) \in \mathrm{Gr}(\hat{A}^0)$ tel que :

(1) $||\bar{x}^{**} - \hat{x}|| \leq \sqrt{\varepsilon}$; et

(2) $||\bar{x}^* - x^*|| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Puisque $A$ est de type (D) il existe une suite généralisée $\{(x_\alpha, x_\alpha^*)\} \subset \mathrm{Gr}(A)$ telle que $\{\hat{x}_\alpha\}$ est bornée par rapport à la norme et converge vers $\bar{x}^{**}$ pour la topologie faible etoile dans $X^{**}$, tandis que $\{x_\alpha^*\}$ converges pour la norme vers $\bar{x}^*$ dans $X^*$. Soit $\alpha$ suffisement grand de sorte que :

(a) $|\langle x_\alpha - x, x_\alpha^* - \bar{x}^*\rangle| \leq \varepsilon/2$;

(b) $|\langle \hat{x}_\alpha - \bar{x}^{**}, \bar{x}^* - x^* \rangle| \le \varepsilon/2$;

(c) $||x^*_\alpha - \bar{x}^*|| \le \sqrt{\varepsilon}$.

La condition (b) est une conséquence de la convergence faible etoile de $\{\hat{x}_\alpha\}$ vers $\bar{x}^{**}$, la condition (c) découle de la convergence (pour la norme) de $\{x^*_\alpha\}$ vers $\bar{x}^*$, et finalement la condition (a) vient de la convergence pour la norme de $\{x^*_\alpha\}$ vers $\bar{x}^*$ et le fait que $\{\hat{x}_\alpha\}$ est bornée. Fixons un $\alpha$ comme ci-dessus et posons $x_\varepsilon = x_\alpha$ et $x^*_\varepsilon = x^*_\alpha$. La condition (i) du corollaire est une conséquence directe de (2) et (c). En ce qui concerne (ii), en utilisant (1),(2), (a) et (b) on obtient :

$$\begin{aligned}
|\langle x_\varepsilon - x, x^*_\varepsilon - x^* \rangle| &= |\langle x_\alpha - x, x^*_\alpha - x^* \rangle| \\
&\le |\langle x_\alpha - x, x^*_\alpha - \bar{x}^* \rangle| + |\langle x_\alpha - x, \bar{x}^* - x^* \rangle| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + |\langle \hat{x}_\alpha - \bar{x}^{**}, \bar{x}^* - x^* \rangle| + |\langle \bar{x}^{**} - \hat{x}, \bar{x}^* - x^* \rangle| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + ||\bar{x}^{**} - \hat{x}||\,||\bar{x}^* - x^*|| \\
&\le \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

# 4 La somme étendue

Dans cette section nous allons considerer la somme étandue introduite dans [RT3]. Cette notion était motivée d'un coté de l'élargissment étduié dans la section précédente et aussi du résultat suivant de Hiriart-Urruty et Phelps [HUPh] :

**Théorème 4.1** (Hiriart-Urruty et Phelps [HUPh]) *Soient $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions propres sci et convexes. Alors, pour tout $x \in \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g$ on a :*

$$\partial(f+g)(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\partial_\varepsilon f(x) + \partial_\varepsilon g(x)}^{w^*}.$$

**Définition 4.2** *La* somme étendue *de deux opérateurs monotones $A, B : X \rightrightarrows X^*$ est l'opérateur*

$$A \underset{ext}{+} B(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{A^\varepsilon x + B^\varepsilon x}^{w^*}, \quad x \in X.$$

Evidement, $A + B \subset \overline{A+B} \subset A \underset{ext}{+} B$ et par suite, $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B) \subset \mathrm{Dom}(A \underset{ext}{+} B)$. Observons aussi que cette somme est commutative : $A \underset{ext}{+} B = B \underset{ext}{+} A$. Mentions qu'en princip, dans le cas général, cette somme n'est pas obligée d'être monotone. Mais comme nous allons voir ci-dessous, dans certains cas importants elle va être pas seulement monotone, mais aussi maximale monotone.

**Théorème 4.3** *Soient $A, B : X \rightrightarrows X^*$ deux opérateurs maximaux monotones tels que $\overline{A+B}$ est maximal monotone. Alors, pour tout $x \in X$ on a :*

$$\overline{A+B}(x) = A \underset{ext}{+} B(x)$$

**Démo :** On doit démontrer seulement que la partie droite est incluse dans la partie gauche. Tout d'abord, observons que pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$A^\varepsilon x + B^\varepsilon x \subset (A+B)^{2\varepsilon} x. \tag{4.1}$$

Pour vérifier cela, fixons $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ et soit $x^* \in A^\varepsilon x + B^\varepsilon x$. Alors, $x^* = u^* + v^*$ pour certains $u^* \in A^\varepsilon x$ et $v^* \in B^\varepsilon x$. Prenons un couple quelleconque $(z, z^*)$ de $\mathrm{Gr}(A+B)$. Donc, $z^* \in (A+B)(z)$ et par conséquent il existe $z_1^* \in Az$ et $z_2^* \in Bz$ tels que $z^* = z_1^* + z_2^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle x - z, x^* - z^* \rangle &= \langle x - z, u^* + v^* - z_1^* - z_2^* \rangle \\ &= \langle x - z, u^* - z_1^* \rangle + \langle x - z, v^* - z_2^* \rangle \\ &\geq -\varepsilon - \varepsilon = -2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $x^* \in (A+B)^{2\varepsilon}(x)$. Ceci entraine (4.1).

D'après la proposition 3.3 on a $(A+B)^{2\varepsilon} = \overline{A+B}^{2\varepsilon}$. Par suite, en utilisant (4.1) on obtient

$$A^\varepsilon x + B^\varepsilon x \subset \overline{A+B}^{2\varepsilon}(x),$$

qui donne

$$\overline{A^\varepsilon x + B^\varepsilon x}^{w^*} \subset \overline{A+B}^{2\varepsilon}(x).$$

Par conséquent,

$$A \underset{ext}{+} B(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{A^\varepsilon x + B^\varepsilon x}^{w^*} \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{A+B}^{2\varepsilon}(x) = \overline{A+B}(x),$$

où la dernière égalité découle de la proposition 3.1. ■

**Corollaire 4.4** *Soient $A, B : X \rightrightarrows X^*$ deux opérateurs maximaux monotones tels que $A+B$ est maximal monotone. Alors, pour tout $x \in X$*

$$(A+B)(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (A^\varepsilon x + B^\varepsilon x) = A \underset{ext}{+} B(x).$$

**Démo :** On démontre la première égalité. La deuxième est une conséquence du résultat précedent. Pour la première égalité on doit montrer toujours que la partie droite est incluse dans la partie gauche. D'après (4.1) on a

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} (A^\varepsilon x + B^\varepsilon x) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} (A+B)^{2\varepsilon}(x) = (A+B)(x),$$

la dernière égalité etant vraie d'après la proposition 3.1. D'où l'inclusion. ■

Un cas particulier de ce corollaire permet d'avoir un type de formule comme celle-ci de Hiriart-Urruty et Phelps avec les nouveaux élargissements dans laquelle on peut enlever les $w^*$-fermetures.

**Corollaire 4.5** *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions propres sci et convexes telles que $\partial f + \partial g$ est maximale montone (c'est-à-dire $\partial f + \partial g = \partial(f+g)$). Alors, pour tout $x \in X$ on a*

$$\partial(f+g)(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big[(\partial f)^{\varepsilon}x + (\partial g)^{\varepsilon}x\Big] = \partial f \underset{ext}{+} \partial g(x).$$

Une condition suffisante pour que la some ponctuelle de deux sous-différentiels soit maximale est le sois disant condition de Robinson-Rockafellar, qui exige l'origin d'être dans le core algébrique de la différence des domaines de $f$ et $g$ (voir e.g. [Th1], Lemma 5 and Corollary 6 et aussi [JuLa]).

Plus général (et plus important) que le résultat particulier ci-dessus est le fait que, sans aucune condition de qualification, le sous-différentiel de la somme de deux fonctions propres sci et convexes est égale à la somme étendue de leurs sous-différentiels. Avant de démontrer ce résultat, on va rappeler une répresentation intéressante du sous-différentiel de la somme de deux finctions propres sci convexes (voir Penot [Pe] et Thibault [Th2]): *Soient $X$ un espace de Banach et $f, g : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions propres sci et convexes. Alors, $(y, y^*) \in \partial(f+g)$ si et seulement si il existent deux suites généralisées $\{(y_\alpha, y^*_\alpha)\} \subset \partial f$ et $\{(z_\alpha, z^*_\alpha)\} \subset \partial g$, telles que $\{y_\alpha\}$ et $\{z_\alpha\}$ convergent fortement vers $y$, $y^* = w^* - \lim(y^*_\alpha + z^*_\alpha)$, $\langle y_\alpha - y, y^*_\alpha\rangle \to 0$ et $\langle z_\alpha - y, z^*_\alpha\rangle \to 0$.* En effet, on a en plus que $f(y_\alpha) \to f(y)$ et $g(z_\alpha) \to g(y)$. Cette réprésentation est un raffinement d'un résultat précedent de Thibault [Th1], Theorem 3. Pour une étude aprofondie de ce sujet (aussi dehors le cas convexe) voir aussi le papier récent de Jules et Lassonde [JuLa].

Nous somme prêts de démontrer maintenant que le sous-différentiel de la somme de deux fonctions propres sci et convexes est éagle à la somme étendue de leurs sous-différentiels sans aucune condition de qualification. C'est un autre exemple (avec le théorème 4.3 et le corollaire 4.4) dans lequel la somme étandue est toujours maximale monotone tandis que la somme ordinaire n'est pas en général.

**Théorème 4.6** *Soient $X$ un espace de Banach et $f, g : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ deux fonctions propres convexes et sci telles que* $\mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g \neq \emptyset$. *Alors, pour tout $x \in X$ on a :*

$$\partial(f+g)(x) = \partial f \underset{ext}{+} \partial g(x).$$

**Démo :** D'après le résultat de Hiriart-Urruty et Phelps (théorème 4.1) et les remarques après la définition de $\varepsilon$-élargissement, il est claire que la partie gauche de l'égalité qu'on doit montrer est incluse dans la partie droite.

Prenons $x \in X$ et supposons que $x^* \in \partial f \underset{ext}{+} \partial g(x)$. On va montrer que le couple $(x, x^*)$ est monotoniquement relié à $\partial(f+g)$. Pusique $\partial(f+g)$ est maximal cela va entrainer $x^* \in \partial(f+g)(x)$.

Soint $(y, y^*) \in \partial(f+g)$ un couple quelleconque. Il faut démontrer que $\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq 0$. Soit $\delta > 0$ et choisissons $\varepsilon > 0$ de sorte que $\varepsilon \leq \delta/8$. Fixons ces deux nombres positifs. Puisque $x^* \in \overline{(\partial f)^{\varepsilon}x + (\partial g)^{\varepsilon}x}^{w^*}$ on peut trouver $u^*_\varepsilon \in (\partial f)^{\varepsilon}x$ et $v^*_\varepsilon \in (\partial g)^{\varepsilon}x$ tels que :

$$|\langle x-y, x^* - u^*_\varepsilon - v^*_\varepsilon\rangle| \leq \frac{\delta}{8}. \tag{4.2}$$

En outre, d'après le résultat de Thibault [Th2] cité ci-dessus, il existent deux suites généralisées $\{(y_\alpha, y_\alpha^*)\} \subset \partial f$ et $\{(z_\alpha, z_\alpha^*)\} \subset \partial g$, telles que $\{y_\alpha\}$ et $\{z_\alpha\}$ convergent fortement vers $y$, $y^* = w^* - \lim(y_\alpha^* + z_\alpha^*)$, $\langle y_\alpha - y, y_\alpha^*\rangle \to 0$ et $\langle z_\alpha - y, z_\alpha^*\rangle \to 0$. Soit $\alpha$ suiffisement large de sorte que :

$$(4.3) \qquad \begin{array}{l} \text{(i) } ||y - y_\alpha||\,||u_\varepsilon^*|| \leq \dfrac{\delta}{8}, \quad ||y - z_\alpha||\,||v_\varepsilon^*|| \leq \dfrac{\delta}{8} \\ \text{(ii) } |\langle x - y, y_\alpha^* + z_\alpha^* - y^*\rangle| \leq \dfrac{\delta}{8} \\ \text{(iii) } |\langle y - y_\alpha, y_\alpha^*\rangle| \leq \dfrac{\delta}{8}, \quad |\langle y - z_\alpha, z_\alpha^*\rangle| \leq \dfrac{\delta}{8} \end{array}$$

En utilisant (4.2) on a :

$$\begin{aligned} \langle x - y, x^* - y^*\rangle &= \langle x - y, u_\varepsilon^* + v_\varepsilon^* - y^*\rangle + \langle x - y, x^* - u_\varepsilon^* - v_\varepsilon^*\rangle \\ &\geq \langle x - y, u_\varepsilon^* + v_\varepsilon^* - y^*\rangle - \frac{\delta}{8}. \end{aligned}$$

Maintenant, on utilise cette dernière inégalité et (4.3) (ii) pour obtenir que pour tout $\alpha$ suffisement large :

$$\begin{aligned} \langle x - y, x^* - y^*\rangle &\geq \langle x - y, u_\varepsilon^* + v_\varepsilon^* - y^*\rangle - \frac{\delta}{8} \\ &= \langle x - y, u_\varepsilon^* + v_\varepsilon^* - y_\alpha^* - z_\alpha^*\rangle + \langle x - y, y_\alpha^* + z_\alpha^* - y^*\rangle - \frac{\delta}{8} \\ &\geq \langle x - y, u_\varepsilon^* - y_\alpha^*\rangle + \langle x - y, v_\varepsilon^* - z_\alpha^*\rangle - \frac{2\delta}{8} \\ &= \langle x - y_\alpha, u_\varepsilon^* - y_\alpha^*\rangle + \langle x - z_\alpha, v_\varepsilon^* - z_\alpha^*\rangle \\ &\qquad + \langle y_\alpha - y, u_\varepsilon^* - y_\alpha^*\rangle + \langle z_\alpha - y, v_\varepsilon^* - z_\alpha^*\rangle - \frac{2\delta}{8} \\ &= \langle x - y_\alpha, u_\varepsilon^* - y_\alpha^*\rangle + \langle x - z_\alpha, v_\varepsilon^* - z_\alpha^*\rangle \\ &\qquad + \langle y_\alpha - y, u_\varepsilon^*\rangle + \langle y - y_\alpha, y_\alpha^*\rangle + \langle z_\alpha - y, v_\varepsilon^*\rangle + \langle y - z_\alpha, z_\alpha^*\rangle - \frac{2\delta}{8}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes dans la dernière expréssion sont plus grands ou égals à $-\varepsilon$ parce que $(x, u_\varepsilon^*) \in (\partial f)^\varepsilon$, $(y_\alpha, y_\alpha^*) \in (\partial f)$, $(x, v_\varepsilon^*) \in (\partial g)^\varepsilon$ et $(z_\alpha, z_\alpha^*) \in (\partial g)$. Donc, en utilisant (4.3) (i) et (4.3) (iii) on peut continuer cette chaine d'inégalités de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \langle x - y, x^* - y^*\rangle &\geq -2\varepsilon - ||y - y_\alpha||\,||u_\varepsilon^*|| - \frac{\delta}{8} - ||y - z_\alpha||\,||v_\varepsilon^*|| - \frac{\delta}{8} - \frac{2\delta}{8} \\ &\geq -2\varepsilon - \frac{\delta}{8} - \frac{\delta}{8} - \frac{4\delta}{8} = -2\varepsilon - \frac{6\delta}{8} \geq -\delta. \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité on a utilisé que $\varepsilon \leq \delta/8$. Par conséquent

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq -\delta$$

et puisque $\delta$ était quelconque, cela implique que $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$. ■

## 4.1 Comparaison de la somme étendue avec la somme variationnelle

Dans cette sous-section on compare les deux notions de somme "généralisée" : celle de la somme variationnelle et celle de la some étendue. Vue le fait que la somme variationnelle n'est définie que dans le cadre réflexif, on va supposer désormès que $X$ est un epsace de Banach réflexif. On considère dans $X$ et $X^*$ les normes de Section 2.

Dans le cadre réflexifs la formule de la some étandue de deux opérateurs monotones se simplifie de la manière suivante :

$$A \underset{ext}{+} B(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{A^\varepsilon x + B^\varepsilon x}, \quad x \in X,$$

où la fermeture à droite est prise par rapport à la norme dans $X^*$. La simplification est évidente car la topologie faible et faible etoile coincide dans ce cas et les ensembles $A^\varepsilon x + B^\varepsilon x$ sont convexes pour tout $\varepsilon$ d'après les remarques après la définition de l'élargissement.

**Lemme 4.7** *Soient $X$ un espace de Banach réflexif et $A, B : X \rightrightarrows X^*$ deux opérateurs maximaux monotones tels que* $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathrm{Dom}(B) \neq \emptyset$. *Alors pour tout $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A \underset{ext}{+} B)$ et tout $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A \underset{v}{+} B)$ on a*

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0. \tag{4.4}$$

**Démo :** Soient $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A \underset{ext}{+} B)(x)$ et $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A \underset{v}{+} B)$. Fixons $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque $x^*$ appartient à la fermeture de $A^\varepsilon(x) + B^\varepsilon(x)$ par rapport à la norme, il existent $u_\varepsilon^* \in A^\varepsilon(x)$ et $v_\varepsilon^* \in B^\varepsilon(x)$ tels que

$$\|x - y\| \, \|x^* - u_\varepsilon^* - v_\varepsilon^*\| \leq \varepsilon. \tag{4.5}$$

Fixons ces $u_\varepsilon^*$ et $v_\varepsilon^*$. Pour chaque $n = 1, 2, \ldots$, soient $\lambda_n, \mu_n > 0$ tels que $\lim_n \lambda_n = \lim_n \mu_n = 0$. Puisque $(y, y^*) \in \mathrm{Gr}(A \underset{v}{+} B)$ il existe une suite $\{(y_n, y_n^*)\}_{n=1}^\infty$ telle que $y = \lim_n y_n$, $y^* = \lim_n y_n^*$ et $y_n^* = A_{\lambda_n} y_n + B_{\mu_n} y_n$. Soit $M > 0$ une borne supérieure des normes des éléments de la suite $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ et soit $n$ tellement large que :

$$\begin{aligned} &|\langle x - y, y_n^* - y^* \rangle| < \varepsilon \\ &\|y - y_n\| < \frac{\varepsilon}{\|u_\varepsilon^* + v_\varepsilon^*\| + M}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Finalement, en utilisant Lemme 2.6 on peut penser que $n$ est aussi suffisaiment large de sorte que

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon^*\|\,\|\lambda_n A_{\lambda_n} y_n\| < \varepsilon \\ &\|v_\varepsilon^*\|\,\|\mu_n B_{\mu_n} y_n\| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Maintenant, (4.5) et (4.6) nous permettent d'obtenir que pour $n$ suffisement large on a :

$$\begin{aligned} \langle x-y, x^*-y^*\rangle &= \langle x-y, u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*-y^*\rangle + \langle x-y, x^*-u_\varepsilon^*-v_\varepsilon^*\rangle \\ &\geq \langle x-y, u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*-y_n^*\rangle + \langle x-y, y_n^*-y^*\rangle \\ &\quad -\|x-y\|\,\|x^*-u_\varepsilon^*-v_\varepsilon^*\| \\ &\geq \langle x-y_n, u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*-y_n^*\rangle \\ &\quad +\langle y_n-y, u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*-y_n^*\rangle - 2\varepsilon \\ &\geq \langle x-y_n, u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*-y_n^*\rangle \\ &\quad -\|y_n-y\|\,(\|u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*\|+M) - 2\varepsilon \\ &\geq \langle x-y_n, u_\varepsilon^*+v_\varepsilon^*-A_{\lambda_n}y_n-B_{\mu_n}y_n\rangle - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Après on utilise (2.3) pour continuer cette chaine d'inégalités :

$$\begin{aligned} \langle x-y, x^*-y^*\rangle &\geq \langle x-y_n, u_\varepsilon^*-A_{\lambda_n}y_n\rangle + \langle x-y_n, v_\varepsilon^*-B_{\mu_n}y_n\rangle - 3\varepsilon \\ &= \langle x-J_{\lambda_n}^A y_n - \lambda_n J^{-1}(A_{\lambda_n}y_n), u_\varepsilon^*-A_{\lambda_n}y_n\rangle \\ &\quad +\langle x-J_{\mu_n}^B y_n - \mu_n J^{-1}(B_{\mu_n}y_n), v_\varepsilon^*-B_{\mu_n}y_n\rangle - 3\varepsilon \\ &= \langle x-J_{\lambda_n}^A y_n, u_\varepsilon^*-A_{\lambda_n}y_n\rangle + \langle x-J_{\mu}^B y_n, v_\varepsilon^*-B_{\lambda_n}y_n\rangle \\ &\quad -\lambda_n\langle J^{-1}(A_{\lambda_n}y_n), u_\varepsilon^*-A_{\lambda_n}y_n\rangle \\ &\quad -\mu_n\langle J^{-1}(B_{\mu_n}y_n), v_\varepsilon^*-B_{\mu_n}y_n\rangle - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que $u_\varepsilon^* \in A^\varepsilon(x)$ et $v_\varepsilon^* \in B^\varepsilon(x)$. Ceci et (2.5) montrent que les premiers deux terms dans la dernière expression sont plus grands où égals à $-\varepsilon$. Donc (en utilisant aussi la définition de $J^{-1}$ et (4.7)) :

$$\begin{aligned} \langle x-y, x^*-y^*\rangle &\geq -\lambda_n\langle J^{-1}(A_{\lambda_n}y_n), u_\varepsilon^*-A_{\lambda_n}y_n\rangle \\ &\quad -\mu_n\langle J^{-1}(B_{\mu_n}y_n), v_\varepsilon^*-B_{\mu_n}y_n\rangle - 5\varepsilon \\ &= \lambda_n\|A_{\lambda_n}y_n\|^2 - \lambda_n\langle J^{-1}(A_{\lambda_n}y_n), u_\varepsilon^*\rangle \\ &\quad +\mu_n\|B_{\mu_n}y_n\|^2 - \mu_n\langle J^{-1}(B_{\mu_n}y_n), v_\varepsilon^*\rangle - 5\varepsilon \\ &\geq -\lambda_n\|A_{\lambda_n}y_n\|\,\|u_\varepsilon^*\| - \mu_n\|B_{\mu_n}y_n\|\,\|v_\varepsilon^*\| - 5\varepsilon \\ &\geq -7\varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, on vient de démontrer que

$$\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq -7\varepsilon,$$

et puisque $\varepsilon > 0$ était quelconque on conclut que

$$\langle x-y, x^*-y^*\rangle \geq 0,$$

i.e. (4.4) est vraie. ■

Ce lemme donne comme des conséquences imédiates les assertions suivantes :

**Théorème 4.8** *Soient $X$ un espace de Banach réflexif et $A, B : X \rightrightarrows X^*$ deux opérateurs maximaux monotones tels que $A \underset{v}{+} B$ est maximal monotone. Alors, pour tout $x \in X$ on a*

$$(A \underset{ext}{+} B)(x) \subset (A \underset{v}{+} B)(x).$$

**Corollaire 4.9** *Soient $A, B$ deux opérateurs maximaux monotones dans un espaces réflexif tells que $A \underset{v}{+} B$ est maximal monotone. Alors, $A + B \subset A \underset{v}{+} B$.*

Il faudrait dire qu'en général la question de la comparaison entre la some ponctuelle et la somme variationnelle est ouverte.

Bien sur on a le résultat symètrique :

**Théorème 4.10** *Soient $A, B$ deux opérateurs maximaux monotones dans un espace reflexive tels que $A \underset{ext}{+} B$ est maximal monotone. Alors, $A \underset{v}{+} B \subset A \underset{ext}{+} B$.*

Finalement, d'après les théorèmes 2.8, 2.9, 2.10, théorèmes 4.3, 4.6 et corollaire 4.4, on a les cas suivants dans lesquels les deux concepts de somme coincident.

**Corollaire 4.11** *Soient $A, B$ deux opérateurs maximaux monotones dans un espace réflexif, tels que l'opérateur $\overline{A + B}$ est maximal monotone. Alors*

$$A \underset{v}{+} B = A \underset{ext}{+} B = \overline{A + B}.$$

**Corollaire 4.12** *Soient $A, B$ deux opérateurs maximaux monotones dans un espace réflexif, tels que l'opérateur $A + B$ est maximal monotone. Alors*

$$A \underset{v}{+} B = A \underset{ext}{+} B = A + B.$$

**Corollaire 4.13** *Soient $f, g$ deux fonctions propres convexes et sci dans un espace réflexif, telles que* $\mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g \neq \emptyset$. *Alors*

$$\partial f \underset{v}{+} \partial g = \partial f \underset{ext}{+} \partial g = \partial f + g.$$

# 5 Composition variationnelle d'un opérateur monotone avec un opérateur linéaire

Dans ce qui suit $U$ et $X$ seront deux espaces de Banach réflexifs toujours munis avec des normes satisfaisant les propriétés de la section 2. En particulier, les applications de dualités $J_X$ et $J_U$ ont aussi les mêmes propriétés commes celles-ci mentionnées dans la section 2.

Soit $T : U \rightrightarrows U^*$ un opérateur (maximal) monotone et $A : X \to U$ un opérateur linéaire et continu avec conjugé $A^* : U^* \to X^*$. Il est facile de voir que l'application composée $A^*TA : X \rightrightarrows X^*$, définie par $A^*TA(x) := \cup\{A^*u^* : u^* \in T(Ax)\}$, est monotone. Ce type d'opérateurs apparaissent, par exemple, dans le domaine de EDP en forme de divergence, et ils contiennent comme un cas particulier la somme ponctuelle de deux opérateurs (voir plus bas). Sans conditions suplémentaires, $A^*TA$ peut violer la propriété d'être maximal– voir par exemple Rockafellar et Wets [RoW], Robinson [Rob] et Pennanen [P] pour des conditions suffisantes. Alors, comme dans le cas de la somme de deux opérateurs, il est donc naturel de chercher une "approximation" de $A^*TA$ avec un opérateur qui a plus de chance d'être maximal. L'idée générale est la même comme dans le cas de la somme ponctuelle: de considerer la même opération (composition) pour les approximés de Yosida et de prendre la limite au sens de graphes.

La régularisé de Yosida $T_\lambda : U \rightrightarrows U^*$ de $T$ est continue et univoque pour tout $\lambda > 0$, alors c'est aussi le cas de la composition $A^*T_\lambda A : X \rightrightarrows X^*$. La monotonie de $T_\lambda$ implique dans ce cas que $A^*T_\lambda A$ est maximal monotone pour tout $\lambda > 0$ (Browder [Br], voir aussi [Ze]). Ceci, le fait que $\lim_{\lambda\searrow 0} T_\lambda = T$ et l'idée pour la somme variationnelle, suggestionnent le suivant.

**Définition 5.1** *Soient $A : X \to U$ un opérateur continu et linéaire et $T : U \rightrightarrows U^*$ un opérateur maximal monotone. La* composition variationnelle $(A^*TA)_v : X \rightrightarrows X^*$ *de $A$ et $T$ est l'opérateur*

$$(A^*TA)_v = \liminf_{\lambda\searrow 0} A^*T_\lambda A.$$

D'après la proposition 2.3(a), $(A^*TA)_v$ est monotone, et d'après (b),

$$(A^*TA)_v = \lim_{\lambda\searrow 0} A^*T_\lambda A,$$

quand $(A^*TA)_v$ est maximal monotone.

L'idée de remplacer $A^*TA$ par $A^*T_\lambda A$, et de prendre la limite, a été déjà utilisée (dans le cas de dimension finie) dans la démonstration de [RoW, Theorem 12.43].

La composition variationnelle est etroitement reliée à la somme variationnelle de deux opérateurs monotone $T^1$ et $T^2$ de $X$ dans $X^*$ :

Posons $U = X \times X$, $Ax = (x, x)$, et $T(x_1, x_2) = T^1(x_1) \times T^2(x_2)$. D'abord, observons que $A^*TA = T^1 + T^2$. Puisque $T_\lambda = T^1_\lambda \times T^2_\lambda$ on obtient $A^*T_\lambda A = T^1_\lambda + T^2_\lambda$ et

$$(A^*TA)_v = \liminf_{\lambda\searrow 0}(T^1_\lambda + T^2_\lambda),$$

et par conséquent $T^1 \underset{v}{+} T^2 \subset (A^*TA)_v$. Alors, $(A^*TA)_v$ est égale à $T^1 \underset{v}{+} T^2$, chaque fois quand le dernier est un opérateur maximal monotone.

Maintenant on va faire la comparaison de la composition variationnelle avec la composition usuelle. Le comportement est pareil de celui du cas de la somme variationnelle.

D'abord on démontre un lemme technique.

**Lemme 5.2** *Si $T$ est monotone, alors pour $u^* \in T(u)$ et $v^* = T_\lambda(v)$ on a*

$$\langle u - v, u^* - v^* \rangle \geq -\frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2.$$

**Démo :** Puisque $v^* = T_\lambda(v)$ signifie que $v - \lambda J_U^{-1}(v^*) \in T^{-1}(v^*)$, la monotonie de $T$ implique $\left\langle u - v + \lambda J_U^{-1}(v^*), u^* - v^* \right\rangle \geq 0$, et donc

$$\begin{aligned}
\langle u - v, u^* - v^* \rangle &\geq \lambda \left\langle J_U^{-1}(v^*), v^* - u^* \right\rangle \\
&\geq \lambda(\|v^*\|^2 - \|u^*\|\|v^*\|) \\
&\geq \lambda \min_{\alpha \in \mathbb{R}}\{\alpha^2 - \|u^*\|\alpha\} = -\lambda\frac{\|u^*\|^2}{4}.
\end{aligned}$$

■

Comme dans le cas de la somme variationnelle, en général, on ne peut pas dire que $A^*TA \subset (A^*TA)_v$, mais on a :

**Proposition 5.3** *Soient $A : X \to U$ un opérateur continu et linéaire et $T : U \rightrightarrows U^*$ un opérateur maximal monotone. Alors,* $\mathrm{Dom}(A^*TA) \subset \mathrm{Dom}(A^*TA)_v$*, et si $(A^*TA)_v$ est maximal monotone on a $A^*TA \subset (A^*TA)_v$.*

**Démo :** Si $x_0 \in \mathrm{Dom}(A^*TA)$, alors $Ax_0 \in \mathrm{Dom}(T)$. D'après la proposition 2.2 (c)), $T_\lambda(Ax_0)$ converge fortement vers $T^{\min}(Ax_0) =: u_0^*$. Par suite, la continuité de $A^*$ donne que $(A^*T_\lambda A)(x_0)$ converge fortement vers $A^*u_0^*$. Alors, par définition, $A^*u_0^* \in (A^*TA)_v(x_0)$. Ceci implique $x_0 \in \mathrm{Dom}(A^*TA)_v$.

Pour démontrer la deuxième partie, prenons $\lambda > 0$, $(x, x^*) \in A^*TA$ et $(x_\lambda, x_\lambda^*) \in \mathrm{Gr}(A^*T_\lambda A)$. Il existent $u^* \in T(Ax)$ et $u_\lambda^* \in T_\lambda(Ax_\lambda)$ tels que $x^* = A^*u^*$ et $x_\lambda^* = A^*u_\lambda^*$. Alors, d'après le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle x - x_\lambda, x^* - x_\lambda^* \rangle &= \langle x - x_\lambda, A^*u^* - A^*u_\lambda^* \rangle \\
&= \langle Ax - Ax_\lambda, u^* - u_\lambda^* \rangle \geq -\frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2.
\end{aligned}$$

Puisque chaque point $(\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in \mathrm{Gr}(A^*TA)_v$ peut être obtenu comme une limite de $(x_\lambda, x_\lambda^*)$ où $\lambda \searrow 0$, on doit avoir

$$\langle x - \tilde{x}, x^* - \tilde{x}^* \rangle \geq 0 \quad \forall (\tilde{x}, \tilde{x}^*) \in \mathrm{Gr}(A^*TA)_v.$$

Comme $(x, x^*) \in A^*TA$ était arbitraire et $(A^*TA)_v$ est maximal, ceci implique $A^*TA \subset (A^*TA)_v$. ■

On continue avec la vérification que si la composition usuelle (ou sa fermeture) est maximale, alors elle coincide avec la composition variationnelle. L'aproche pour la démonstration est pareille de celui utilisé dans [ABT1, RT1] (voir théorème 2.8).

**Théorème 5.4** *Si l'opérateur* $\overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}$ *est maximal monotone, alors*

$$(A^*TA)_v = \overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}.$$

**Démo :** Soit $y^* \in X^*$ un élément arbitraire. Pour $\lambda > 0$ on désigne par $x_\lambda$ l'unique solution de l'équation

$$J_X(x) + (A^*T_\lambda A)(x) = y^*.$$

D'après la proposition 2.3 (c), il suffit de montrer que quand $\lambda \searrow 0$, $x_\lambda$ converge fortement vers l'unique solution de

$$J_X(x) + \overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}(x) \ni y^*.$$

Prenons $(x, x^*) \in A^*TA$ quelconque et soit $u^* \in T(Ax)$ tel que $x^* = A^*u^*$. D'après le lemme 5.2,

$$-\frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2 \leq \langle Ax - Ax_\lambda, u^* - T_\lambda(Ax_\lambda)\rangle = \langle x - x_\lambda, A^*u^* - (A^*T_\lambda A)(x_\lambda)\rangle\,,$$

donc, en utilisant la définition de $x_\lambda$ on a,

$$\langle x - x_\lambda, x^* + J_X(x_\lambda) - y^*\rangle \geq -\frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2. \tag{5.1}$$

Ceci implique, en particulier, que

$$-\|x_\lambda\|^2 - (\|x\| + \|x^* - y^*\|)\|x_\lambda\| \geq -\langle x, x^* - y^*\rangle - \frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2,$$

et alors, $\{x_\lambda\}$ doit être bornée. Par conséquent cette suite a un point d'accumulation par rapprort à la topologie faible. Notons ce point par $\bar{x}$.

En utilisant la monotonie de $J_X$ on a $\langle x - x_\lambda, J_X(x)\rangle \geq \langle x - x_\lambda, J_X(x_\lambda)\rangle$, alors (5.1) donne

$$\langle x - x_\lambda, x^* + J_X(x) - y^*\rangle \geq -\frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2,$$

et en passant à la limite on obtient

$$\langle x - \bar{x}, x^* + J_X(x) - y^*\rangle \geq 0.$$

Puisque $(x, x^*) \in A^*TA$ était quelconque ceci implique

$$\langle x - \bar{x}, x^* + J_X(x) - y^*\rangle \geq 0 \quad \forall (x, x^*) \in \overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}.$$

En outre, la maximalité de $\overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}$ donne que l'opérateur $J_X + \overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}$ est aussi maximal et par conséquent on doit avoir $(\bar{x}, y^*) \in \mathrm{Gr}(J_X + \overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}})$. Autrement dit

$$J_X(\bar{x}) + \overline{(A^*TA)}^{\mathrm{Gr}}(\bar{x}) \ni y^*. \tag{5.2}$$

D'après le théorème de Rockafellar cette inclusion détermine le point $\bar{x}$ de manière unique. Par suite, toute la famille $\{x_\lambda\}$ doit converger faiblement vers $\bar{x}$.

En utilisant encore une fois (5.1) et l'inégalité $\langle J_X(x_\lambda), x\rangle \leq \frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|x_\lambda\|^2$, on obtient

$$\frac{1}{2}\|x_\lambda\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle x - x_\lambda, x^* - y^*\rangle + \frac{\lambda}{4}\|u^*\|^2,$$

d'où

$$\limsup_{\lambda\searrow 0} \|x_\lambda\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\langle x - \bar{x}, x^* - y^*\rangle\,.$$

Puisque $(x, x^*) \in \mathrm{Gr}(A^*TA)$ était arbitraire, et pusique d'après (5.2) on a $(\bar{x}, y^* - J_X(\bar{x})) \in \overline{A^*TA}^{\mathrm{Gr}}$, on doit avoir

$$\limsup_{\lambda\searrow 0} \|x_\lambda\|^2 \leq \|\bar{x}\|^2,$$

donc, la propriété de Kadec-Klee donne $x_\lambda \to \bar{x}$ fortement. ■

Le corollaire suivant est immediat. Il montre que la nouvelle notion est raisonable.

**Corollaire 5.5** *Si l'opérateur $A^*TA$ est maximal monotone, alors*

$$(A^*TA)_v = A^*TA.$$

Des conditions suffisantes pour que $A^*TA$ soit maximal peuvent être trouvées dans [RoW, Rob, P]. En particulier, $A^*TA$ est maximal monotone chaque fois quand $0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{R}(A) - \mathrm{Dom}(T))$ [P, Corollary 4.4]. Ici "ri" signifie *l'intérieur relative.*

Pour un nombre $m$ d'opérateurs monotones $T^1, \ldots, T^m$ de $X$ dans $X^*$, on pourrait définir une "somme variationnelle" par $\liminf_{\lambda\searrow 0}(T^1_\lambda + \cdots + T^m_\lambda)$.

**Corollaire 5.6** *Soient $T^1, \ldots, T^m$ des opérateurs maximaux monotones de $X$ dans $X^*$. Si l'application $\overline{T^1 + \cdots + T^m}^{\mathrm{Gr}}$ est maximale monotone, alors*

$$\lim_{\lambda\searrow 0}(T^1_\lambda + \cdots + T^m_\lambda) = \overline{T^1 + \cdots + T^m}^{\mathrm{Gr}}.$$

**Démo :** Soit $U$ l'espace $X \times \cdots \times X$ muni avec la norme $\|(x_1, \ldots, x_m)\|^2_U = \|x_1\|^2_X + \cdots + \|x_m\|^2_X$. Dans ce cas $J_U = (J_X, \cdots, J_X)$. Si on définit $T(x_1, \ldots, x_m) = T^1(x_1) \times \cdots \times T^m(x_m)$, et $Ax = (x, \ldots, x)$, alors $T_\lambda = T^1_\lambda \times \cdots \times T^m_\lambda$, et on a

$$\begin{aligned} A^*TA &= T^1 + \cdots + T^m, \\ A^*T_\lambda A &= T^1_\lambda + \cdots + T^m_\lambda. \end{aligned}$$

Le résultat donc découle du théorème 5.4. ■

Ce corollaire evidement resemble au théorème 2.8.

## 5.1 Une règle de calcul de sous-differentielle sans conditions de qualification

Soient $f : U \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et sci et $A : X \to U$ un opératuer continu et linéaire. Alors, la composition $f \circ A$ est aussi convexe et sci. En plus, d'après la règle de l'analyse convexe,

$$\partial(f \circ A) \supset A^* \partial f A,$$

où l'égalité est vraie si la condition de qualification $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{R}(A) - \mathrm{dom} f)$ est satsifaite ([Ro3]). Mais sans une condition de qualification de ce type, l'inclusion peut être stricte. On va montrer ici qu'une formule plus générale est vraie pour $\partial(f \circ A)$ dans les termes de la compositione variationnelle.

**Théorème 5.7** *Soient $A : X \to U$ un opérateur linéaire et continu et $f$ une fonction propre convexe et sci sur $U$. Si $\mathrm{dom}(f \circ A) \neq \emptyset$, alors*

$$\partial(f \circ A) = (A^* \partial f A)_v.$$

**Démo :** Par définition,

$$\begin{aligned}(A^* \partial f A)_v &= \liminf(A^*(\partial f)_\lambda A) \\ &= \liminf(A^* \partial f_\lambda A) = \liminf(\partial(f_\lambda \circ A)),\end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de la règle classique de l'analyse convex qui s'applique parce que $f_\lambda$ est continue. Quand $\lambda \searrow 0$, les fonctions $f_\lambda \circ A$ monotoniquement croissent vers $f \circ A$, ce qui implique (d'après [A1, Theorem 2.40]) que $f_\lambda \circ A$ Mosco converge vers $f \circ A$. Par conséquent, en utilisant le résultat de Attouch (voir avant théorème 2.10),

$$\lim \partial(f_\lambda \circ A) = \partial(f \circ A).$$

Ceci termine la preuve. ∎

Ce théorème donne (comme dans le cas de la somme variationnelle) une formule exacte pour $\partial(f \circ A)$. Dans la section suivante on verra un exemple où la condition de qualification $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{R}(A) - \mathrm{Dom}(T))$ n'est pas vérifiée, mais où la composition variationnelle peut être calculée.

# 6 Applications aux EDP elliptiques avec des coéficients singuliers

Dans cette section on va utiliser la composition variationnelle pour étudier certains EDP sous une forme de divergence, admettant des coéficients singuliers. D'abord on va rappeler certains propriétés de mesurabilité reliées à des familles d'applications.

Dans ce qui suit $\Omega$ désigne un espace mesurable et tous les espaces concernés sont des espaces de Hilbert séparables.

Soit $\{T(\omega) : H \rightrightarrows H\}_{\omega\in\Omega}$ une famille d'opérateurs. Définisson l'application $\mathcal{L}_2[T] : L^2(\Omega; H) \rightrightarrows L^2(\Omega; H)$ (qui s'appelle l'extension canonique de $T$) par

$$\mathcal{L}_2[T](v) = \{v^* \in L^2(\Omega; H) : v^*(\omega) \in T(\omega)(v(\omega)) \text{ p.p. dans } \Omega\}.$$

Dans ce cas les propriétés mesurables de $\omega \mapsto \mathrm{Gr}T(\omega)$ sont très importantes. Rappelons que

**Définition 6.1** *Une application multivoque $S : \Omega \rightrightarrows H$ est* mesurable *si pour tout ouvert $C \subset H$, l'ensemble*

$$S^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \cap C \neq \emptyset\}$$

*est mesurable. La famille des applications $\{T(\omega) : H \rightrightarrows H\}_{\omega\in\Omega}$ est* mesurable *si l'application $\omega \mapsto \mathrm{Gr}T(\omega)$ est mesurable.*

La mesurabilité des applications multivoque a été largement étudiée : voir par exemple Castaing et Valadier [CV], Attouch [A0], Rockafellar [Ro4] et Rockafellar et Wets [RoW, Chapter 14]. Le cas d'applications monotones est particulièrement important. Si $T(\omega)$ est monotone p.p. sur $\Omega$, alors $\mathcal{L}_2[T]$ est aussi monotone. Le résultat suivant (voir par exemple [B, Example 2.3.3]) donne une condition simple pour sa maximalité.

**Théorème 6.2** *Soit $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ une famille mesurable d'opérateurs maximaux monotones sur $H$. Si $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2[T]) \neq \emptyset$ alors $\mathcal{L}_2[T]$ est maximal monotone.*

Ce résultat est etroitement relié à la théorie des intégrandes convexes normales. Une fonction $f$ sur $\Omega \times H$ s'appelle *une integrande convexe normale* si l'appliaction $\omega \mapsto \mathrm{epi}f(\omega, \cdot)$ est mesurable avec des images convexes et fermés. Si $f$ est une intégrande convexe normale, alors la fonction intégrale

$$I_f(u) = \begin{cases} \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\omega & \text{si } f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est convexe et sci sur $L^2(\Omega; H)$. D'après [A0, Theorem 2.3], $f$ est une intégrande convexe normale si et seulement si, $\{\partial f(\omega, \cdot)\}_{\omega\in\Omega}$ est une famille mesurable d'applications maximales monotones sur $H$, et il existe une fonction mesurable $u : \Omega \mapsto H$ telle que $f(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable. La formule

$$\partial I_f = \mathcal{L}_2[\partial f]$$

est vraie pour chaque intégrande convexe normale si $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2[\partial f]) \neq \emptyset$ [Ro4]. Ceci est aussi une conséquence du théorème 6.2 et du fait que $\partial I_f \supset \mathcal{L}_2[\partial f]$.

Remarquons aussi que $\mathcal{L}_2[T]^{-1} = \mathcal{L}_2[T^{-1}]$, où $T^{-1}(\omega) = T(\omega)^{-1}$. Puisque l'identité dans $L^2(\Omega; H)$ peut être ecrit comme $J_{L^2(\Omega;H)} = \mathcal{L}_2[J_H]$, en particulier, pour les approximés de Yosida, on a que

$$\mathcal{L}_2[T]_\lambda = \mathcal{L}_2[T_\lambda],$$

où $T_\lambda(\omega) = T(\omega)_\lambda$, si $\mathcal{L}_2[T]$ est maximal monotone (voir théorème 6.2).

Dans [ABT1] les auteurs ont démontré sur un exemple de méchanique quantique comment la somme variationnelle peut être utilisée pour trouver explicitement le sous-différentiel de la somme de deux fonctions convexes non-continues. Pareillement, l'expression

$$\partial(f\circ A) = (A^*\partial f A)_v$$

de théorème 5.7 peut être utilisée pour trouver $\partial(f\circ A)$ dans les cas quand la règle $\partial(f\circ A) \supset A^*\partial f A$ n'est pas satisfaite comme égalité. Le but de ce qui suit est d'obtenir une expression du sous-différentiel d'une fonction d'énergie, non-continue en général, par calculation d'une composition variationnelle.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $Q : \Omega \to \mathbb{R}^{N\times N}$ une application mesurable avec $Q(x)$ symètrique et semi-définie positive p.p. dans $\Omega$. Considerons la fonction $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ défine par

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u(x)\cdot Q(x)\nabla u(x)dx & \text{si } \nabla u\cdot Q\nabla u \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Des fonctions comme celle-ci apparaissent souvent dans le domaine de la physique et le but principal est de minimiser $g - \langle\cdot, u^*\rangle$ (pour un certain $u^* \in H_0^1(\Omega)^*$) sur $H_0^1(\Omega)$, ou bien, de manière équivalente, de résoudre l'inclusion $\partial g(u) \ni u^*$. Pour ca, évidement, il serait utile d'avoir une formule explicite pour $\partial g$.

Remarquons qu'on peut écrire $g$ sous une forme de composition $g = I_f\circ\nabla$, avec l'application linéaire et continue $\nabla : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_i}\}_{i=1}^N$, et l'intégrande convexe normale $f(x,v) = \frac{1}{2}v\cdot Q(x)v$. Il s'en suit que $g$ est convexe et sci parce que il est de même pour $I_f$. Aussi, comme $g$ est quadratique, dom$g$ est un sous-espace linéaire. Puisque $\partial f(\omega,\cdot) = Q(\omega)$, on a $0 \in \mathcal{L}_2[\partial f](0)$ et par conséquent (voir ci-dessus) $\partial I_f = \mathcal{L}_2[\partial f]$.

Dans le cas quand la condition de qualification $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{R}(\nabla) - \mathrm{dom}I_f)$ est vraie, par exemple quand $Q(x) \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$ et on a dom$I_f = L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$, la règle classique donne la formule simple $\partial g = \nabla^*\mathcal{L}_2[Q]\nabla$, où $\nabla^* = -\mathrm{div}$ (la divergence), i.e.

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\partial g &= \big\{u \in H_0^1(\Omega) \;\big|\; Q\nabla u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)\big\} \\ \partial g(u) &= -\mathrm{div}(Q\nabla u). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser le théorème 5.7 pour obtenir une formule pour $\partial g$ dans le cas $Q \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$. Dans cette situation, en général, dom$I_f \neq L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$, alors la condition $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{R}(\nabla) - \mathrm{dom}I_f)$ peut être violée.

D'abord on a besoin de deux lemmes auxiliers.

**Lemme 6.3** *Pour chaques deux normes* $|\cdot|$ *et* $\|\cdot\|$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *et* $\mathbb{R}^{N\times N}$*, respectivement, il existe une constante* $C$ *telle que pour toute matrice symètrique semi-définie positive* $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *on a*

1. $|Mv| \le C(\|M\| + v\cdot Mv) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N,$
2. $|Mv| \le C\sqrt{\|M\| v\cdot Mv} \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$

**Démo :** Soit $M = Q^*\Lambda Q$, où $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, la décomposition spectrale de $M$, et désignons la $p$-norme dans $\mathbb{R}^N$ par $|\cdot|_p$. Pusique $M$ est semi-définie positive, $\lambda_i \geq 0$, et on obtient

$$\begin{aligned}
|Mv|_2 = |\Lambda Q v|_2 \leq c|\Lambda Q v|_1 \\
&= c\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i |(Qv)_i|\right) \\
&\leq c\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (Qv)_i^2\right) \\
&\leq c\left(N\rho(M) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (Qv)_i^2\right),
\end{aligned}$$

où $\rho(M)$ est le radius spectral de $M$. La partie 1 découle du fait que le radius spectral est une norme dans l'espace de matrice symètriques, et aussi $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (Qv)_i^2 = (Qv) \cdot \Lambda(Qv) = v \cdot Mv$. En applicant la partie 1 à $\lambda v$ avec $\lambda > 0$ quelconque on obtient

$$|Mv| \leq C \inf_{\lambda>0} \left(\frac{\|M\|}{\lambda} + \lambda v \cdot Mv\right) = 2C\sqrt{\|M\| v \cdot Mv},$$

donc, le résultat veint en changeant les constantes. ■

**Lemme 6.4** *Soient $\varphi_n, \varphi : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ des fonctions mesurables telles que $\varphi_n \to \varphi$ p.p. sur $\Omega$. S'il existent $\psi \in L^1(\Omega)$ et une fonction continue $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$ telle que $\rho(0) = 0$ et*

$$\int_E |\varphi_n| < \rho\left(\int_E |\psi|\right) \quad \forall n, \tag{1}$$

*pour tout ensemble mesurable $E \subset \Omega$, alors $\varphi_n, \varphi \in L^1(\Omega)$ et $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.*

**Démo :** Il est claire que (1) implique $\varphi_n \in L^1(\Omega)$. Donc, il suffit, d'après le théorème de Vitali, de vérifier que

1. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$meas(E) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |\varphi_n(x)| dx \leq \varepsilon \quad \forall n,$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $E_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $meas(E_\varepsilon) < \infty$ et

$$\int_{\Omega \setminus E_\varepsilon} |\varphi_n| < \varepsilon \quad \forall n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de $\rho$ donne l'existence de $\eta > 0$ tel que $\rho(\xi) \leq \varepsilon$ pour tout $\xi \in [0, \eta]$. En outre, on utilise l'intégrabilité de $\psi$ de trouver $\delta > 0$ tel que

$$meas(E) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |\psi| \leq \eta.$$

Ceci montre que la condition 1 est vraie.

Pour démontrer la deuxième condition , soient $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tels que $E_k \subset E_{k+1}$, $meas(E_k) < \infty$ et $\cup E_k = \Omega$. Alors, d'après le théorème de convergence monotone

$$\int_{E_k} |\psi| = \int_\Omega |\psi|\chi_{E_k} \nearrow \int_\Omega |\psi|$$

et par conséquent $\int_{\Omega\setminus E_k} |\psi| \to 0$. La deuxième condition donc découle de (1) et la continuité de $\rho$. ■

Rapellons que la divergence est définie (au sens de distributions) pour chaque distribution à valeur vectorielles et que le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ est plongé dans l'espace de distributions. Dans ce qui suit $C_c^\infty(\Omega)$ désigne l'espace de fonctions testes sur $\Omega$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$, et $J$ est l'application de dualité de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Notons aussi que $\nabla w \cdot Q\nabla u \in L^1(\Omega)$ chaque fois quand $w, u \in \mathrm{dom} g$. Vraiement, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\nabla w \cdot Q\nabla u| \leq |\nabla w \cdot Q\nabla w|^{\frac{1}{2}} |\nabla u \cdot Q\nabla u|^{\frac{1}{2}},$$

et puis d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega |\nabla w \cdot Q\nabla u| \leq \left[\int_\Omega \nabla w \cdot Q\nabla w\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega \nabla u \cdot Q\nabla u\right]^{\frac{1}{2}} = 2g(w)^{\frac{1}{2}} g(u)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous somme déjà prêts de formuler et démontrer le résultat principal de cette section.

**Théorème 6.5** *Si $Q \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^{N\times N})$, alors $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathrm{dom} g$, $Q\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ pour tout $u \in \mathrm{dom} g$, et*

$$\mathrm{dom}\partial g = \Big\{ u \in H_0^1(\Omega) \,|\, u \in \mathrm{dom} g,\ \mathrm{div}(Q\nabla u) \in H^{-1}(\Omega),$$
$$\langle w, -\mathrm{div}(Q\nabla u)\rangle = \int_\Omega \nabla w \cdot Q\nabla u \quad \forall w \in \mathrm{dom} g \Big\}, \tag{2}$$
$$\partial g(u) = -\mathrm{div}(Q\nabla u). \tag{3}$$

**Démo :** Si $w \in C_c^\infty(\Omega)$, alors $\nabla w \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et par conséquent $\nabla w \cdot Q\nabla w \in L^1(\Omega)$. Donc, $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathrm{dom} g$. Or, d'après le lemme 6.3(1), nous avons que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$|Q(x)\nabla u(x)| \leq C(\|Q(x)\| + \nabla u(x) \cdot Q(x)\nabla u(x)),$$

ce qui montre que si $u \in \mathrm{dom} g$ on a $Q\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Pour obtenir la formule pour le sous-différentiel nous allons désigner par $G$ l'application donnée par (2)–(3). Puisque $0 \in \mathrm{dom} g$, on a $\partial g = (\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]\nabla)_v$ d'après le théorèm 5.7. Comme $\partial g$ est maximal monotone, il suffit donc de montrer que $G$ est monotone et que $(\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]\nabla)_v \subset G$. Pour tous $u_1, u_2 \in \mathrm{Dom}(G)$ on a

$$\begin{aligned}\langle u_1 - u_2, G(u_1) - G(u_2)\rangle &= \langle u_1, -\mathrm{div}(Q\nabla u_1)\rangle - \langle u_1, -\mathrm{div}(Q\nabla u_2)\rangle \\ &\quad - \langle u_2, -\mathrm{div}(Q\nabla u_1)\rangle + \langle u_2, -\mathrm{div}(Q\nabla u_2)\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_1 \cdot Q\nabla u_1 - \int_\Omega \nabla u_1 \cdot Q\nabla u_2 \\ &\quad - \int_\Omega \nabla u_2 \cdot Q\nabla u_1 + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot Q\nabla u_2 \\ &= \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\cdot Q\nabla(u_1 - u_2).\end{aligned}$$

Alors, la monotonie de $G$ découle du fait que $Q(x)$ est positive semi-définie. Notons que $(\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]\nabla)_v \subset G$ est équivalente à

$$[J + (\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]\nabla)_v]^{-1}(u^*) \subset (J+G)^{-1}(u^*) \quad \forall u^* \in H^{-1}(\Omega)$$

où d'après le théorème 5.7 et la proposition 2.3 (c)

$$[J + (\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]\nabla)_v]^{-1}(u^*) = \lim_{\lambda \searrow 0} [J + \nabla^* \mathcal{L}_2[Q]_\lambda \nabla]^{-1}(u^*).$$

Donc, pour terminer la preuve il suffit de voir que pour tout $u^* \in H^{-1}(\Omega)$ la limite (par rapport à la norme) $\bar{u}$ de la famille $\{u_\lambda\} \subset H^1_0(\Omega)$ définie par

$$J(u_\lambda) + (\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]_\lambda \nabla)(u_\lambda) = u^* \tag{4}$$

est une solution de

$$J(u) + G(u) = u^*. \tag{5}$$

D'abord, puisque $\bar{u} \in \mathrm{dom}(\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]_\lambda \nabla)_v$ et d'après théorème 5.7 $\partial g = (\nabla^* \mathcal{L}_2[Q]_\lambda \nabla)_v$, on a $\bar{u} \in \mathrm{dom} g$. Or, comme $\mathcal{L}_2[Q]_\lambda = \mathcal{L}_2[Q_\lambda]$, où $Q_\lambda \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$, (4) signifie que

$$\langle w, J(u_\lambda)\rangle + \int_\Omega \nabla w \cdot Q_\lambda \nabla u_\lambda = \langle w, u^*\rangle \tag{6}$$

pour tout $w \in H^1_0(\Omega)$. En particulier, avec $w = u_\lambda$ on obtient

$$\|u_\lambda\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot Q_\lambda \nabla u_\lambda \leq \|u_\lambda\|_{H^1_0(\Omega)} \|u^*\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

qui implique

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \cdot Q_\lambda \nabla u_\lambda \leq \frac{1}{4}\|u^*\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \quad \forall \lambda > 0. \tag{7}$$

Prenons maintenant $w \in \mathrm{dom} g$ dans (6), et posons

$$\varphi_\lambda = \nabla w \cdot Q_\lambda \nabla u_\lambda \quad \text{et} \quad \varphi = \nabla w \cdot Q \nabla \bar{u}.$$

Nous allons démontrer que les conditions du lemme 6.4 sont satisfaites. Tout d'abord puisque $Q(x)_\lambda \to Q(x)$ pour tout $x \in \Omega$, et $\nabla u_\lambda \to \nabla \bar{u}$ dans la norme dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a (en passant à sous-suite s'il est nécessaire) que $\varphi_\lambda \to \varphi$ p.p. dans $\Omega$. Puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq [\nabla w(x) \cdot Q(x)_\lambda \nabla w(x)]^{\frac{1}{2}} [\nabla u_\lambda(x) \cdot Q(x)_\lambda \nabla u_\lambda(x)]^{\frac{1}{2}},$$

où

$$\nabla w(x) \cdot Q(x)_\lambda \nabla w(x) \leq \nabla w(x) \cdot Q(x) \nabla w(x),$$

parce que pour tout $x$, la fonction $\phi_\lambda(v) := v \cdot Q(x)_\lambda v$ est la régularisé de Moreau–Yosida de $\phi(v) := v \cdot Q(x)v$. Par suite, en utilisant cette fois l'inégalité de Hölder's nous avons que pour toute partie mesurable $E \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \int_E |\varphi_\lambda(x)| dx &\leq \left[ \int_E \nabla u_\lambda \cdot Q_\lambda \nabla u_\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_E \nabla w \cdot Q \nabla w \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^*\|_{H^{-1}(\Omega)} \left[ \int_E \nabla w \cdot Q \nabla w \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où la seconde inégalité vient de (7). Pusique $w \in \mathrm{dom} g$, on a $\nabla w \cdot Q \nabla w \in L^1(\Omega)$, et par suite les conditions du lemme 6.4 sont satsifaites. Alors, $\int_\Omega \varphi_\lambda \to \int_\Omega \varphi$, et en passant à la limite dans (6) on obtient

$$\langle w, J(\bar{u}) \rangle + \int_\Omega \nabla w \cdot Q \nabla \bar{u} = \langle w, u^* \rangle \quad \forall w \in \mathrm{dom} g. \tag{8}$$

Nous avons déjà vu que $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathrm{dom} g$. Alors, (8) donne que

$$J(\bar{u}) - \mathrm{div}(Q \nabla \bar{u}) = u^* \tag{9}$$

au sens de distributions. Mais pusique $J(\bar{u}), u^* \in H^{-1}(\Omega)$, (9) doit être vraie aussi dans $H^{-1}(\Omega)$, avec $\mathrm{div}(Q \nabla \bar{u}) \in H^{-1}(\Omega)$. Par conséquent nous avons que pour tout $w \in \mathrm{dom} g$,

$$\begin{aligned} \langle w, -\mathrm{div}(Q \nabla \bar{u}) \rangle &= \langle w, u^* \rangle - \langle w, J(\bar{u}) \rangle \\ &= \int_\Omega \nabla w \cdot Q \nabla \bar{u}, \end{aligned}$$

où la dexième égalité suit de (8). En résumé, $\bar{u}$ est une solution de (5). ■

En utilisant théorème 6.5 en combinaison avec des résultats de l'analyse convexe, on peut obtenir des résultats d'existence de solutions pour des EDP associées avec l'opérateur $\partial g$. Voici un simple exemple.

**Corollaire 6.6** *Supposons $\Omega$ bornée, $\alpha > 0$, et soit $Q \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^{N\times N})$ telle que $v\cdot Q(x)v \geq \alpha|v|^2$ pour tout $v \in \mathbb{R}^m$ et pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, pour tout $u^* \in H^{-1}(\Omega)$, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\begin{gathered} -\mathrm{div}(Q\nabla u) = u^*, \\ \nabla u \cdot Q\nabla u \in L^1(\Omega), \quad Q\nabla u \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N), \\ \textit{et} \quad \langle w, -\mathrm{div}(Q\nabla u)\rangle = \int_\Omega \nabla w \cdot Q\nabla u \end{gathered}$$

*pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant $\nabla w \cdot Q\nabla w \in L^1(\Omega)$.*

**Démo :** Soit $g$ comme dans le théorème 6.5. Alors, d'après les conditions du corollaire sur $Q$ et d'après l'inégalité de Poincaré, on peut trouver $c > 0$ tel que

$$g(u) \geq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq c\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Donc, $g$ est coercive et par suite c'est le cas aussi de $g - \langle\cdot, u^*\rangle$. Ceci implique que $g - \langle\cdot, u^*\rangle$ a un minimum unique. De manière équivalente l'inclusion $\partial g(u) \ni u^*$ a unique solution. Le résultat donc découle du théorème 6.5. ■

Remarquons à la fin que les idées et les techniques de cette section peuvent être utilisés pour étudier des équations d'évolution. On peut aussi explorer EDP nonlinéaires où l'opérateur linéaire $Q(x)$ est remplacé par $\partial f(x,\cdot)$ pour une intégrande convexe normale $f$ plus général. Des résultats dans cette direction sont obtenus par Attouch et Damlamian [AD] dans un cadre un peu plus différent.

# References


[A0] H. Attouch, Familles d'opérateurs maximaux monotones et mesurabilité, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **120**(1979), 35–111.

[A] H. Attouch, On the maximality of the sum of two maximal monotone operators, *Nonlinear Analysis, TMA*, **5**(1981), 143–147.

[A1] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, (Applicable Math. Series, Pitman, London, 1984).

[ABT1] H. Attouch, J.-B. Baillon and M. Théra, Variational sum of monotone operators, *Journal of Convex Analysis*, **1**(1994), 1-29.

[ABT2] H. Attouch, J.-B. Baillon and M. Théra, Weak solutions of evolution equations and variational sum of maximal monotone operators, *SEA Bull. Math.* **19**(1995), 117–126.

[AD] H. Attouch and A. Damlamian, Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi linéaires, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.* A 79 (1977/78), no. 1-2, 107–129.

[ART] H. Attouch, H. Riahi and M. Théra, Somme ponctuelle d'opérateurs maximaux monotones, *Serdica Mathematical Journal*, **22**(1996), 267–292.

[AT] H. Attouch and M. Théra, Convergences en analyse multivoque et unilatérale, *MATAPLI, Bulletin de liaison* 36 (1993) 23–40.

[B] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holand, 1973.

[BCrPa] H. Brezis, M.G. Crandall and A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space, *Comm. Pure Appl. Math.* XXIII (1970) 123–144.

[Br] F.E. Browder, Nonlinear maximal monotone operators in Banach space, *Mathematische Annalen*, **175**(1968), 89–113.

[BuISv] R.S. Burachik, A.N. Iusem and B.F. Svaiter, Enlargements of maximal monotone operators with applications to variational inequalities, *Set-valued Analysis*, **5**(1997), 159–180.

[BuSSv] R.S. Burachik, C. A. Sagastizábal and B.F. Svaiter, $\varepsilon$-Enlargements of maximal monotone operators: Theory and Applications, in Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods, M. Fukushima and L. Qi (eds), Kluwer Academic Publishers, pp.25–43, 1998.

[CV] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580., Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[Ch] L.-J. Chu, On the sum of monotone operators, *Michigan Mathematical Journal*, **43**(1996), 273–289.

[Dia] T. Diagana, *Sommes d'opérateurs et conjecture de Kato-McIntosh*, (Thèse de l'Université Lyon I, 1999).

[Di] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[DrLa] L. Drewnowski and I. Labuda, On minimal convex usco and maximal monotone maps, *Real Analysis Exchange* **15**(1989-90), 729–741.

[Go1] J.-P. Gossez, Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non réflexifs, *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, **34**(1971), 371–395.

[Go2] J.-P. Gossez, On the extensions to the bidual of a maximal monotone operator, *Proceedings if the American Mathematical Society*, **62**(1977), 67–71.

[HUMSV] J.-B. Hiriart-Urruty, M. Moussaoui, A. Seeger and M. Volle, Subdifferential calculus without constraint qualification hypothesis, *Nonlinear Analysis, TMA*, **24**(1995), 1727–1754.

[HUPh] J.-B. Hiriart-Urruty, R.R. Phelps, Subdifferential calculus using $\varepsilon$-subdifferentials, *Journal of Functional Analysis*, **118**(1993), 154–166.

[J] A. Jourani, *Variational sum of subdifferentials of convex functions*, in: Proc. of the Fourth Catalan Days on Applied Mathematics, C. Garcia, C. Olive, M. Sanroma (eds.), Tarragona Press University, Tarragona, 1998, pp. 71–80.

[JuLa] F. Jules and M. Lassonde, Formulas for subdifferentials of sums of convex functions, *J. Convex Anal.*, to appear.

[K] F. Kubo, Conditional expectations and operations derived from network connections, *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, **80**(1981), 477–489.

[Lap] M. Lapidus, Formules de Trotter et calcul opérationnnel de Feynman, Thèse d'Etat, Université Paris VI, Juin 1986.

[LP] R. Lucchetti, F. Patrone, A characterization of Tykhonov well-posedness for minimum problems with applications to variational inequalities, *Numerical Functional Analysis and Optimization* **3(4)**(1981), 461–476.

[MaT] J. E. Martinez-Legaz and M. Théra, $\varepsilon$-subdifferentials in terms of subdifferentials, *Set-valued Analysis* **4**(1996), 327–332.

[Mo] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Adv. Math.* 3 (1969) 510–585.

[Ni] M. Nisipeanu, Somme variationnelle d'opérateurs et applications, Thèse de l'Université de Limoges, October 1997.

[P] T. Pennanen, Dualization of generalized equations of maximal monotone type, *SIAM J. Optim.*, **10**(2000), 809–835.

[PRT] T. Pennanen, J.P. Revalski and M. Théra, Variational composition of a monotone mapping with a linear mapping with applications to elliptic PDE with singular coeficients, *J. Funct. Anal.*, to appear.

[Pe] J.-P. Penot, Subdifferential calculus without qualification conditions, *Journal of Convex Analysis*, **3**(1996), 1–13.

[Ph1] R.R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **1364**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Ph2] R.R. Phelps, Lectures on Maximal Monotone Operators, *Extracta Mathematicae*, **12**, No.3(1997), 193–230.

[R] J.P. Revalski, Variational inequalities with unique solution, in *Mathematics and Education in Mathematics*, Proceedings of the 14-th Spring Conference of the Union of the Bulgarian Mathematicians, April 1985, pp.534–541.

[RT1] J.P. Revalski and M. Théra, Generalized sums of monotone operators, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, **t. 329**, Série I, (1999), 979–984.

[RT2] J.P. Revalski and M. Théra, Variational and extended sums of monotone operators, in Ill-posed Variational Problems and Regularization Techniques, M. Théra and R. Tichatschke (eds.), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Vol. **477**, 1999, pp. 229–246.

[RT3] J.P. Revalski and M. Théra, Enlargements and sums of monotone operators, *Nonblinear Anal. TMA*, **48**(2002), 505–519.

[Rob] S.M. Robinson, Composition duality and maximal monotonicity, *Math. Programing*, **85**(1999), Ser. A, 1–13.

[Ro1] R.T. Rockafellar, Local boundedness of nonlinear monotone operators, *Michigan Mathematical Journal* **16**(1969), 397–407.

[Ro2] R.T. Rockafellar, On the maximality of sums of nonlinear monotone operators, *Transactions of the American Mathematical Society*, **149**(1970), 75–88.

[Ro3] R.T. Rockafellar, *Conjugate Duality and Optimization*, SIAM, 1974.

[Ro4] R.T. Rockafellar, Integral functionals, normal integrands and measurable selections, in *Nonlinear operators and the calculus of variations*, pp. 157–207, Lecture Notes in Math., Vol. 543, Springer, Berlin, 1976.

[RoW] R.T. Rockafellar and R.J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, 1998.

[Si] S. Simons, Minimax and Monotonicity, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **1693**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Sv] B. Svaiter, A family of enlargements of maximal monotone operators, *Set-Valued Anal.*, **8**(2000), 311–328.

[Th0] L. Thibault, "A direct proof of a sequential formula for the subdifferential of the sum of two convex functions", Unpublished paper, (1994).

[Th1] L. Thibault, A general sequential formula for subdifferentials of sums of convex functions defined on Banach spaces, Recent Developments in Optimization, (seventh French-German Conference held at Dijon in June 27–July 2, 1994) edited by R. Durier and C. Michelot, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Vol. **429**(1995), pp.340–345.

[Th2] L. Thibault, A short note on sequential convex subdifferential calculus, 1995, Unpublished paper.

[To] D. Torralba, Convergence épigraphique et changements d'échelle en analyse variationnelle et optimisation, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II, 1996.

[Ve] L. Veselý, Local uniform boundedness principle for families of $\varepsilon$-monotone operators, *Nonlinear Analysis, TMA* , **24**(1994), 1299–1304.

[Ze] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II*, Springer-Verlag, 1990.